ПОЛИНОМ

№4 2009

НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Читателю и автору

Журнал «Полином» является научно-методическим журналом, ориентированным на широкую аудиторию лиц, имеющих отношение к преподаванию математики: учителей, методистов, преподавателей и учащихся педвузов, историков образования.

Основная цель журнала — знакомить читателей с исследованиями в области теории и практики обучения математике, работами по истории математики и истории математического образования.

Название журнала — «Полином» — выбрано неслучайно. За словом «полином» скрывается не только математический объект, рациональная функция, но нечто большее. Слово «полином» происходит от греческого πολυς — многочисленный, обширный и латинского nomen — имя, т.е. фактически «полином» означает «много имён». Такое толкование тесно связано с основной задачей журнала: собирать на своих страницах «много имён», много статей из разных уголков страны и мира.

Каждый желающий может предложить свой текст для публикации в журнале. Основные требования, которым должен удовлетворять текст: 1) быть потенциально интересным для читателей; 2) быть представленным в электронном виде (только текстовый редактор Word). Чертежи желательно изготовлять в Corel Draw или «Живой геометрии» и присылать их в отдельных файлах соответствующей программы.

Журнал является бесплатным, гонорары авторам не выплачиваются.

На электронные ресурсы, как и на бумажные, необходимо ссылаться при цитировании. ГОСТ 7.0.5–2008 разъясняет, как организованы ссылки на электронные издания. Ориентируясь на требования, сформулированные в ГОСТе, можно предложить следующий вид ссылки на статью, опубликованную в электронном журнале «Полином»:

Иванов И.И. К вопросу о преподавании математики [Электронный ресурс] // Полином. 2009. № 1. С. 2–8. URL: http://www.mathedu.ru/polinom/polinom2009-1.pdf (дата обращения: 12.01.2009).

Полином

Научно-методический журнал
№ 4/2009

Выходит 4 раза в год

Учредитель и редактор В. М. Бусев

Ведущие отдела задач Д. В. Прокопенко, П. В. Чулков

Художник О. П. Богомолова

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций Российской Федерации Эл. № ФС77-34064

СОДЕРЖАНИЕ

От редактора

С выходом четвёртого номера журналу «Полином» исполняется год. За этот год удалось сделать немало, подтверждение чему – десятки статей по самым разным темам, занимающие сотни электронных страниц. Статистика скачиваний и личные контакты редактора показывают, что у журнала постепенно складывается круг читателей, что не может не радовать.

Особенно приятно, что впервые в журнал написал автор «со стороны» – человек, с которым я не был знаком и который не был связан с членами редколлегии (это С.А. Беляев, статья которого помещена в настоящем номере).

В новом году журнал будет продолжать развиваться. В частности, появилось желание несколько переориентировать задачный отдел. Теперь в нём будут публиковаться задачи, быть может, и не оригинальные, но могущие оказаться полезными учителю. Задачи будут снабжены кратким комментарием, а в следующем номере будут опубликованы решения и педагогические соображения (как можно использовать задачи в практике преподавания). Это изменение задачного отдела произведено уже в этом номере.

Есть желание завести рубрику «Образование в мире», где помещать статьи, из которых хотя бы примерно было понятно, что происходит в математическом образовании (и просто в образовании) стран ближнего и дальнего зарубежья. Надеемся, что эта инициатива будет поддержана читателями, проживающими в республиках бывшего СССР и других странах, и они возьмут на себя труд рассказать об образовании той страны, где живут и работают.

Ждём ваших статей, откликов на статьи этого номера и задач.

Просьба присылать их **до 25 марта 2010 г.**

В.М. Бусев

Из истории математики

Старинные польские задачи

Галина Ивановна СИНКЕВИЧ
старший преподаватель кафедры математики
Санкт-Петербургского архитектурно-строительного института
Galina_Sinkevich@omni.spb.ru

Старинные задачники центральной Европы XVI–XVII вв. позволяют воссоздать картину массовой математической культуры той эпохи. В это время развивались строительство, торговля, военное дело. Необходимо было обучать будущих купцов коммерции и переводу денежных единиц и мер, будущих ремесленников – расчётам в технических задачах. Будущий чиновник должен быть способен оценить объёмы работ и снабжения, уметь вычислить налоги и т.д. В XVII в. появляются задачи, сюжеты которых связаны с ведением хозяйства: расчёт жалованья слуг, определение стоимости покупок, задачи на проценты и др.

Активная международная торговля способствовала развитию математики и математического образования. Через Моравию и Силезию проходил важный торговый путь из Ржезна в Краков, Киев и Ильтыз (современная Астрахань), к которому присоединялись торговые пути в Италию, идущие вдоль Лабы (Эльбы), Волги, Днепра и Вислы. Здесь же лежал торговый путь к Балтике, проходили торговцы из Руси, Франции, Испании. Пересчёт таможенных пошлин, различных мер, весов и денег требовал хороших математических навыков.

Расцвет экономики XVI в. вызвал потребность в создании различных таблиц. В сохранившихся рукописях того времени встречаются таблицы процентов, таблицы умножения до 20×90 и таблицы, необходимые при обмене различных валют. Например, в 1598 г. в Праге вышли на латинском языке таблицы Вацлава Колидия. Это были простые таблицы расчёта налогообложения от одного гроша до десяти тысяч грошей и от одного дня до десяти лет с начислением 6%.

Источником многих задач XVI–XVII в. являлись задачи, пришедшие из Древней Греции, Индии, Китая, стран ислама. Наряду с ними появлялись и национальные задачи, адаптированные к языку, к практике торговли и ремёсел, банковскому делу. Фигура ученика становится персонажем или наблюдателем ситуаций в сюжетах многих задач. Со временем меняется социальная принадлежность ученика и его возраст. В ранних задачниках XVI в. это купец, ремесленник или чиновник, которого нужно обучить расчётам. Затем это дворянский недоросль, которому трудно сосредоточиться на абстрактных схемах, и учитель придумывает ему задачи о количестве девушек в саду, о совместных расходах на выпивку, об украденных деньгах. Это мог быть мальчик, которому интересна забавная или сказочная ситуация. Это могла быть дама, которая озабочена расходами на хозяйство, скупостью мужа или негодной прислугой.

Заметим, что решались эти задачи сложнее, чем сейчас, — и метод решения, и единицы измерения, и способы вычислений были иными. В некоторых задачах решение не единственно, либо условие не полно; предполагалось, что недостающие данные известны учителю и ученику, а порядок результата ясен из контекста. Бывает, что вопрос не ставится, а подразумевается. К некоторым задачам даётся ответ, иногда приводится решение.

Рассмотрим некоторые старинные польские задачи, содержащиеся в рукописях и книгах XVI–XVIII вв. (сначала приводится источник, а затем задачи, из него заимствованные, с авторскими решениями и нашими комментариями). Но сначала приведём некоторые соотношения между польскими денежными единицами того времени, которые используются в задачах:

1 шелянг = 2 четвертака
1 грош = 3 шелянга
1 трояк = 3 гроша
1 шостак = 6 грошей
1 злотый = 30 грошам
1 талер = 3 злотых

Название: Алгоритм, то есть наука считать по-польски на линиях, с прилежанием изложенная и улучшенная, пригодная к обучению более чем все предыдущие
Автор: Бернард Воевудка
Место и время издания: Краков, 1553
Комментарий: Автор был печатником (типографом), происходившим из богатой семьи. Его «Алгоритм...» имел несколько изданий.

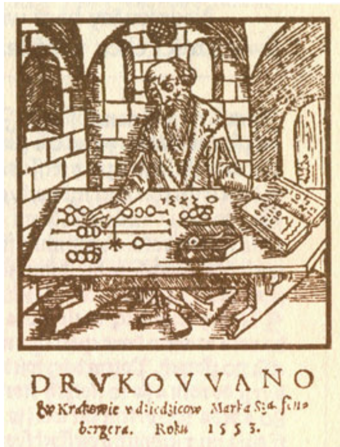
1. Один богатый купец поехал на рынок в Скармеж и купил воз яиц по 7 яиц за четвертак, и привёз в Краков на базар, продал всё по 6 яиц за четвертак и выручил 4 злотых. Вопрос, сколько было яиц в том возу, который он купил в Скармеже.

Решать надо так: во-первых, предположим, что сначала он купил 6 яиц, которые продал за 1 четвертак, скажем, купил 7 яиц за четвертак, зачтём, что 6 яиц стоит $\frac{6}{7}$ четвертака, которые получают с одного четвертака, а оставшиеся $\frac{1}{7}$ четвертака истратил на 6 яиц. При этом если счесть всё количество яиц на возу, так положи на каждую $\frac{1}{7}$ четвертака всего по 6 яиц, яйца дают 4 злотых прибыли. По этому правилу на том возу было 30 240 яиц.

Комментарий. Приведём решение, более близкое современному читателю. Прибыль с одного яйца составила $\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42}$ четвертака. 4 злотых прибыли составляют 720 четвертаков. Чтобы найти общее количество яиц, нужно 720 разделить на $\frac{1}{42}$; получим 30 240 яиц.

2. Король наш всемилостивейший Зыгмунд II Август взял из своей казны 321400 злотых, которыми хотел оплатить кавалеристов и пехотинцев, и две части хотел иметь кавалеристов, а третью часть (войска) хотел иметь пехотинцев. В год платить кавалеристу 10 злотых ежеквартально, а пехотинцу 5 злотых. Вопрос, сколько кавалеристов и пехотинцев можно иметь за 321400 злотых.

Смотри: 2 верховых в год, по 20 злотых за квартал, две части войска это верховые, итого 80 злотых. Потом смотри, еще 1 пехотинец за 20 злотых, которые прибавим к 80 и будет 100, потом рассудим по правилу, сколько кавалеристов и пехотинцев можно иметь за 1000 злотых, а наберем 321400 злотых, так кавалеристов и пехотинцев 9642. (Король выдаёт 100 злотых на трёх солдат, а 1000 злотых на 30, след., 321 000 злотых на $321 \cdot 30 = 9\,630$ солдат. Т.к. 100 злотых выдает на троих, то 400 злотых на 12). А если хочешь узнать, сколько было отдельно пеших и конных, дели 9642 на три.



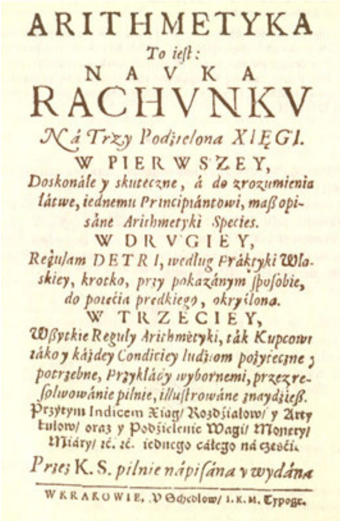
Страница из книги Б. Воевудки

Комментарий. Решение этой задачи можно упростить. После того, как найдена сумма годового расхода на содержание двух кавалеристов и одного пехотинца (100 злотых), делим 321400 злотых на 100 и получаем 3214 «троек» людей, т.е. всего людей $3213 \cdot 3 = 9642$.

Название: Арифметика наука числительная, в трёх книгах
Автор: Кшиштоф Шедель
Место и время издания: Краков, 1662
Комментарий: Об авторе ничего неизвестно, кроме того, что он был типографом. После «Арифметики» издал философский трактат «Наука доброго и счастливого умирания» (1675)

1. Один локоть чёрных шелковых кружев по 13 и $\frac{1}{2}$ гроша. Спрашивается, сколько придётся заплатить за 31 и $\frac{1}{4}$ локтя. (Ответ: 14 злотых 1 и $\frac{7}{8}$ гроша.)

2. Один человек купил 6 штук голландского (нидерладского) полотна, в которых было 28, 32, 27, 29, 31, 28 локтей. Первые две штуки по 2 злотых 18 грошей за локоть, другие две штуки по 3 злотых, а последние две штуки стоили по 2 злотых 20 грошей. Сколько заплатил за всё. (Ответ: 481 злотый 10 грошей.)


ARITHMETYKA
To iest:
NAVKA
RACHVNKV
Ná Trzy Podźielona XIĘGI.
W PIERWSZEY,
Doskonále y skuteczne, á do zrozumienia łátwe, iednemu Principiántowi, maß opisáne Arithmetyki Species.
W DRVGIEY,
Regulam DETRI, według Fráktyki Włoskiey, krotko, przy pokazánym sposobie, do poięcia prędkiego, okryślona.
W TRZECIEY,
Wßytkie Reguły Arithmetyki, ták Kupcowi táko y káżdey Condiciey ludźiom pożyteczne y potrzebne, Przykłády wybornemi, przez resolwowánie pilnie, illustrowáne znaydźieß.
Przytym Indicem Xiąg/ Rozdźiałow/ y Artykułow/ oraz y Podźielenie Wagi/ Monety/ Miáry/ ec. ec. iednego cáłego ná częśći.
Przez K. S. pilnie nápisána y wydána
W KRAKOWIE, V Schedlow/ I. K. M. Typogr.

Титульный лист «Арифметики» К. Шеделя

3. Один человек принёс меднику старой меди 53 и $\frac{1}{4}$ фунта, по 14 грошей за фунт. Взял у медника новой меди 47 и $\frac{1}{2}$ фунта, по 18 грошей за фунт. Вопрос, кто из них кому платит. (Ответ: медник должен получить с заказчика 3 злотых и 19 и $\frac{1}{2}$ гроша.)

4. Одна пани нанимает прислугу, обещает ей за год 13 злотых. Та прослужила 16 недель, начались ссоры, да такие, что прислуга уходит. Вопрос, сколько ей должны заплатить. (Ответ: 4 злотых.)

5. Один человек купил стадо овец, за каждые 5 штук платил по 7 рыночных злотых, а потом их сразу же продал, каждые 12 овец по 17 рыночных злотых, и заработал на всех этих овцах 28 рыночных злотых. Теперь спрашиваю, сколько было овец. (Ответ: 1680 овец.)

6. На 100 злотых суммы капитала берут в год по 6 злотых интереса. Сколько приходится с 295 злотых через 3 года и 4 месяца?

7. Один добрый приятель ссудил другому 1200 злотых без интереса на $\frac{1}{2}$ года. Спрашиваю, на сколько месяцев в другой раз в первый может у второго взять 840 злотых, ибо тот ему обязан, без вознаграждения? (Ответ: на $8\frac{4}{7}$ месяца.)

8. Один кавалер проводил время в весёлом саду, встретил несколько девушек, поклонился им, а затем спрашивал, не четверть ли сотни их, потому что не всех перед проповедью разглядеть может. На это одна из них сказала, что нас не четверть сотни, однако если бы нас было столько да ещё два раза по столько, и ещё полстолько, и ещё $\frac{1}{3}$ столько, и ещё двое, тогда бы нас было 25. (Ответ: 6 девушек.)

9. Волк, Пёс и Лис задрали на лугу трёх баранов. Волк съел своего за четверть часа, Пёс за полчаса, а Лис за час. Вскоре Волк поймал ещё барана и начал его есть. Через полчетверти часа пришли Пёс и Лис и помогли ему доесть барана. Вопрос, как быстро они его доели.

10. Одна знатная дама взяла у мужа 300 гривен для шитья, купила 3 штуки льняного полотна доброй работы, каждая штука $79\frac{3}{4}$ локтя, каждый локоть по $1\frac{2}{3}$ гривны. Сколько она сэкономила на покупке? (Ответ: $98\frac{3}{4}$ гривны.)

Завершается эта книга басней с моралью.

Ехал старик на осле, а за ним маленький сын шёл пешком. Люди увидели это и стали укорять его: «Что же ты ребенка так мучаешь?» Отец слез с осла, и посадил сына, а люди стали говорить: «Глупый старик, что же ты себя мучаешь, нечего мальчику отдыхать». «Слезай, — говорит отец, — пойдешь пешком». И смеялись люди, что осёл идёт пустой, а за ним двое ненормальных. Тогда и отец, и сын сели оба на осла, он их повёз, а люди снова смеялись. Видя это, сказал старик: «Как ни старайся, трудно угодить ожиданиям, не опасаясь досужих языков».

Название: Арифметика как наука о числе. Как целые, так и дробные, здесь же примеры различных любопытных проблем, сводящихся к числам, из различных авторов
Автор: Михаил Качвинский
Место и время издания: Краков, 1757
Комментарий: Об авторе ничего неизвестно, кроме того, что он происходил из окружения краковского епископа. Вероятнее всего, был ксендзом (польским католическим священником).

Приведём фрагмент книги, в котором говорится о тройном и товарищеском правилах.

Золотое правило. Regula Zlota. Тройное правило. Regula Detri. За ту особенность называется таковым, что как к золоту мы относимся с почтением, так и это правило имеет ценность удивительной своей операцией, а тройное правило за то так названо, что даёт три столбца, что и будет показано, и даётся способ, как с трёх вопросов разузнать о четвёртом, например: «За 15 лотов хлеба взяли 123 злотых, сколько злотых заплатить за 364 лота?» Ответ: $2984\frac{4}{5}$ злотых.

О товарищеском правиле (или общественное правило). Свойство пропорции или тройное правило ещё применяется, когда несколько купцов вкладывают в товар деньги не поровну, а нужно рассчитать прибыль или убыток. Например: «Трое сложились на покупку вина, A дал 1000 злотых, B дал 1500 злотых, C дал 2500 злотых. Прибыль составила 2000 злотых. Сколько злотых нужно дать каждому?» Ответ: A – 400, B – 600, C – 1000.

Название: Рахмистр (мастер счёта) польский, т.е. собрание всяких правил арифметических и алгебраических с достаточными пояснениями и примерами, новым ясным языком изложенный
Автор: Йозеф Торжевский.
Место и время издания: Типография Бердичевской крепости Наисветлейшей Девы Марии, лета господня 1760 г.
Комментарий: Автор был инженером-металлургом.

1. Фунт изюма стоит 7 грошей, а фунт имбиря 5 грошей. Один человек купил 30 лотов того и другого с тем, чтобы истратить денег поровну, как за изюм, так и за имбирь. Вопрос, сколько он купил изюма и имбиря.

2. Чтобы вспахать пашню 12 локтей длины и 5 локтей ширины, требуется 3 копальщика. Сколько потребуется копальщиков на поле 8 локтей в длину и 10 в ширину.

3. Три человека делили 100 злотых с тем, чтобы второй взял вдвое больше, чем первый, и еще 4 злотых, а третий и 3 раза больше чем второй минус 5 злотых. Сколько каждому досталось?

4. Двое делили 108 злотых так, что если взять третью часть доли первого и четвертую часть второго, то это составило бы 32 злотых. Сколько каждому из тех 108 злотых досталось?

Решение. Пусть первый взял x, а второй y. Тогда $x + y = 108$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=32$, выразим x через y из первого уравнения. Это есть 108 минус y. Будем иметь уравнение $432 - 4y + 3y = 384$, тогда $y + 384 = 432$, тогда $y = 48$, следовательно, $x = 60$.

Название: Арифметика польская в форме иной арифметики с достаточными объяснениями и новыми примерами. Шестое искусство, которое очень любопытно для досконального решения многих задач, изложенное красивым языком.
Автор: P. W.
Место и время издания: не издана, 1767
Комментарий: Возможное имя автора – Пётр Вырожебский.

1. Жаловался один кавалер своим друзьям, что украли у него из сундука мешок с червонными злотыми[1]. Спросили его друзья, а сколько было денег? Плача, кавалер отвечал, что не помнит, но больше 100 червонных злотых. А друзья опять с любопытством спрашивали, как же он своих денег не знает. И отвечал кавалер, что точно сказать не может, но только помнит, что недавно раскладывал те червонные злотые парами, т.е. по два, и оставался в конце счета 1 червонный злотый, не имеющий пары; а когда считал по три, то оставалось два злотых; а когда считал по 4, оставалось три; когда по 5, оставалось 4; когда по 6, оставалось 5; а когда по 7, не оставалось ничего. Этот забавный рассказ кавалера вызвал интерес у его приятелей, и они решили сосчитать, а сколько же было денег; способ счёта выбрали вот какой: взяли сначала то число, на которое делилось без остатка, т.е. 7. Перед этим числом написали единицу, получилось 17, потом это число умножили на 7, отсюда получили ответ 119, что и составляло безошибочно сумму украденных у кавалера червонных злотых. И если встретится кому подобная задача, то действовать нужно таким способом: как говорилось выше, берем сначала в работу первое число, для которого деление производится без остатка, к нему прибавим десять, а потом всё это число вместе с прибавленным десятком умножим на то число, деление на которое производилось без остатка, и так найдём решение для этой забавной задачи.

Комментарий. Пусть читатель проверит, прав ли автор, утверждая общность метода.

2. Один барин встретил в поле пастушку с гусями и сказал ей: «Девочка, у тебя хорошее стадо гусей», на что она ответила: «Добрый господин, здесь нет стада, т.е. ста гусей, а вот если бы было ещё раз столько, да полстолько, да четвертьстолько, да ещё один, тогда было бы стадо, т.е. сто гусей». Спрашивается, сколько гусей было у той пастушки. (Ответ: 36 гусей.)

3. Один господин увидел, как продаются яблоки, и хотел купить копу, т.е. 60 штук хороших яблок. На что ему сказали: «Если бы здесь было еще раз столько, полстолько, да ещё три и два, тогда была бы копа». Спрашивается, сколько было яблок. (Ответ: 22.)

4. Пришли три парня в корчму и пропили 1 злотый, первый дал неизвестно сколько грошей, второй дал столько же и ещё раз столько, а третий дал три раза по столько. Спрашивается, сколько дал каждый из них.

---

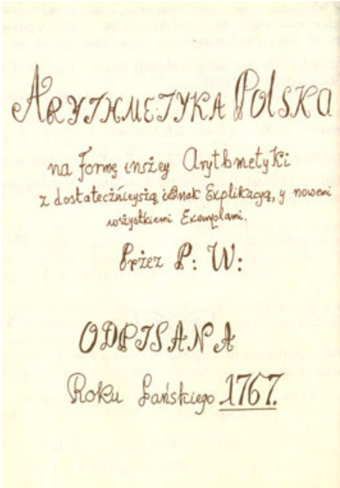
[1] Один червонный злотый – золотая монета достоинством 30 грошей. – *Примеч. авт.*

5. Трое соседей купили одного вола, которого забили; стали его делить. Каждому досталась голова, хвост и потроха. Где бы найти такого вола, чтобы было три головы, три хвоста и трое потрохов?

Решение. Один сосед из троих носил имя «Каждый», поэтому ему это и досталось. Возможно, так всё и было.

6. Шли муж и жена, брат и сестра. Купили три яблока, которые поровну разделили. Спрашивается, как поделили, если было три яблока, а на четверых делили поровну.

Решение. На каждого пришлось по 1 целому яблоку, т.к. их было только три человека, первый человек муж, второй человек жена, третий брат, чья сестра была женой того первого дружка.



Титульный лист «Арифметики польской»

7. У трёх торговок яблоками было у первой 10 яблок, у второй 30 яблок, а у третьей было 50 яблок. Все они продавали по одинаковой цене, и продали все яблоки, но выручка у всех оказалась одинаковой и составила 10 грошей. Это удивительно звучит, и трудно понять, т.к. три торговки имели разное количество яблок. Если бы первая за 10 яблок взяла 10 грошей, то другая должна была бы за 30 яблок получить 30 грошей, а третья за 50 яблок 50 грошей. В чем же секрет?

Решение. А дело было так. Сначала они продавали по 7 яблок за грош. Первая, которая имела 10 яблок, продала 7 яблок за 1 грош, и у нее остались 3 штуки. Вторая, которая имела 30 яблок, продала по той же цене 28 яблок, выручила 4 гроша, и у нее осталось 2 яблока. Третья, которая имела 50, продала по этой цене 49 яблок, выручила 7 грошей и осталось 1 яблоко.

Оставшиеся яблоки они продавали поштучно, потому что в одном доме случилась потребность в яблоках, и посланец этого дома был готов заплатить дорого, лишь бы достать яблоки. Торговки стали продавать яблоки по 3 гроша за штуку. И вот что получилось. Первая, у которой оставалось 3 яблока, продала каждое по 3 гроша и выручила 9 грошей, к которым прибавила 1 грош от прежней выручки, итого получила 10. Вторая имела 2 яблока и продала их по 3 гроша, выручила 6 грошей, к которым прибавила 4 гроша от прежней выручки и всего получила 10 грошей. Третья имела 1 яблоко, которое продала за 3 гроша, добавила к 7 грошам от прежней выручки и всего получила 10 грошей. И так каждая наторговала по 10 грошей, хотя яблок имели не поровну.

Литература и источники

1. *Wieslaw W.* Matematyka polska epoki Oswiecenia. Warszawa, 2007.

2. *Wieslaw W.* Stare polskie zadania z matematyki. Opole, 2000.

3. *Феттер Г.* Краткий обзор развития математики в чешских землях до Белогорской битвы // Историко-математические исследования. Вып. 11. М., 1958. С. 461–514.

Вернуться к содержанию

Из истории просвещения

Очерки истории Пермской школы № 9 (1809–2009)

Наталия Анатольевна КУРДИНА
директор физико-математической школы № 9 им. А.С. Пушкина г. Перми

Надежда Павловна ТАЙФЁРОВА
руководитель Музея истории школы, социальный педагог

Татьяна Константиновна КАМЕНЕВА
руководитель Просветительского центра им. И.Ф. Шарыгина, учитель геометрии
kamenevatk@list.ru

От редактора. Название этой статьи может показаться кому-то странным: что такого интересного можно написать для широкой аудитории об одной школе? И неужели существует школа, которой 200 лет? Оказывается, существует, а рассказать о ней можно много крайне интересного и увлекательного. Интересного не только для узкого круга своих педагогов и учеников, а также историков образования, но и для широкого круга читателей. На наш взгляд, помещаемый ниже текст – яркое тому свидетельство. Статья является фрагментом книги, написанной учителями школы № 9[1].

Эта книга удивляет не только замечательным полиграфическим исполнением, но и своим содержанием. В наше время однодневных PR-акций и красивых бессодержательных буклетов столь добротное исследование – большая редкость. В том, что это именно исследование, настоящая историко-педагогическая работа, сомневаться не приходится. Авторы при подготовке книги использовали литературу по истории народного образования, материалы педагогических съездов и периодической печати, архивные источники, привлекли воспоминания бывших учеников и педагогов.

В результате кропотливого труда авторам удалось воссоздать историю школы, показать её роль в деле народного просвещения в Перми (которая отнюдь не ограничивалась только воспитанием и обучением подрастающих поколений в стенах школы). На наш взгляд, им удалось большее: сквозь призму истории одного учебного заведения увидеть историю образования и страны в целом.

---

[1] *Курдина Н.А., Тайфёрова Н.П., Каменева Т.К.* Очерки из истории пермской школы № 9. 1809–2009. – Пермь: ООО «Типография “Астер”», 2009.

Помещая этот материал в журнал «Полином», мы надеемся, что читатель с интересом пройдёт по тропинкам истории и, быть может, откроет для себя что-то новое, взглянув на историю народного образования с необычной стороны – со стороны одной школы.

Поздравляя педагогов школы № 9 с замечательным юбилеем, хочется выразить им благодарность за тот нелёгкий труд, которому они себя посвятили. Здоровья вам, уважаемые коллеги, радости и сил, чтобы воспитывать достойных граждан России и продолжать славные традиции школы № 9!

Начало

Современная школа № 9 г. Перми ведёт свою историю от Пермского приходского начального мужского училища, которое являлось первым и в течение первой половины XIX в. единственным начальным учебным заведением Перми. Училище было открыто 1 октября 1809 г., в соответствии с отношением (приказом) попечителя Казанского учебного округа С. Я. Румовского от 29 сентября 1809 г. Первоначально оно располагалось в доме мещанина Пантелея Одинцова на ул. Торговой (ныне – Советская), недалеко от Пермской губернской гимназии, открытой 25 сентября 1808 г. (её каменное здание, построенное взамен сгоревшего в 1842 г. деревянного стоит на своём месте и по сей день). В 1845 г. училище переехало в построенное специально для него на средства купца второй гильдии И.А. Гилькова деревянное здание. Дом оценили в очень значительную сумму – 2,5 тысячи рублей серебром, а городская дума назначила на содержание училища 300 рублей в год, или в среднем по 3 рубля в год на ученика.

В училище обучали Закону Божию, чтению, письму, начаткам грамматики, рисованию, арифметике, читали книгу «О должностях человека и гражданина». Много лет училище представляло собой элементарную начальную школу с 1–2 учителями и 30–60 учениками. Учились мальчики из городских семей, как состоятельных, так и бедных.

В 1834 г. с Пермским приходским училищем слита упразднённая школа взаимного обучения[2], открытая в 1819 г. по типу училищ, учреждённых в Санкт-Петербурге в 1818 г. декабристским Вольным обществом.

Врата учёности

Первоначально Пермское мужское приходское училище, как и другие начальные учебные заведения Пермской губернии, управлялось директорами Пермской гимназии, которые по должности являлись директорами народных училищ губернии. Ими были Н.С. Попов, литератор, экономист, коллекционер рукописей, первый географ и историк Пермской губернии, а также И.Ф. Грацинский. В 1874–1875 учебном году Пермское приходское училище перешло в ведение созданной тогда особой дирекции народных училищ. Во главе дирекции стояли выдающиеся личности: сначала врач, летописец Перми В.Н. Шишонко (1879–1889), затем А.П. Раменский (1890–1917). Непосредственное управление училищем осуществлял старший учитель.

---

[2] В этой школе применялась Белл-Ланкастерская система взаимного обучения, при которой старшие и более успевающие ученики под руководством учителя вели занятия с остальными учащимися. – *Прим. ред.*

Учителя приходского училища в основном были выпускниками духовной семинарии или гимназии. Закон Божий преподавал священник.

В начальных училищах, по всей видимости, использовались методические и учебные пособия: «Чему и как учить на уроках русского языка» Тихомирова, «Руководство к практическому курсу правописания» Некрасова, «Методическое решение типических задач» Комарова и др. Рекомендовалось иметь карты Палестины и Российской империи, использовать книгу Анастасиева «Народная школа»[3].

Заслуги училища были отмечены 6 апреля 1885 г. присвоением ему названия Кирилло-Мефодиевского в честь 1000-летия со дня кончины святого Мефодия, который вместе с братом Кириллом создал славянскую азбуку.

Воспитанные училищем

В 1815 г. в начальном мужском училище обучалось 47 человек, в 1835-м – 76. Желающих учить своих детей становилось всё больше. Более того, с августа 1835 г. знание полного курса приходского училища стало обязательным для поступления в гимназию.

14 сентября 1842 г. пожар уничтожил две трети города. В огне погиб архив училища, но известно, что в 1842 г. расходы города на училище составляли 134 рубля и учились в нём 77 мальчиков.

В 1848–1849 учебном году учеников из семей дворян и чиновников было 21, из купцов и мещан – 50, из разночинных крестьян – 47. Всего 118 детей, а это было много! Требовалось открывать второе училище. Сохранился документ, в котором заведующий училищем пишет, что из-за отсутствия мест он вынужден отказывать многим родителям, желающим обучать детей, что порождает жалобы населения.

Семьи горожан хотели дать образование и девочкам. В 1850 г. по ходатайству И.Ф. Грацинского в первом приходском училище было открыто женское отделение для обучения девочек, введена должность особой надзирательницы с платой 100 рублей в год. Таким образом, своим происхождением обязано первому приходскому училищу не только первое Пермское женское училище, но и само женское образование в городе.

Просветители-единомышленники

В 1901 г. заведующим училищем был назначен В.М. Шулепов – народный учитель в истинном смысле этого слова. «Благодаря живой деятельности имя Василия Михеевича Шулепова было известно всем учителям уездного земства», – вспоминал И.П. Зеленин, один из основателей библиотеки в с. Усть-Качка.

В.М. Шулепов

В.М. Шулепов начал педагогическую деятельность в посёлках Пашийского, а затем Юго-Камского заводов. В 1897 г. он был переведён в Пермь в Кирилло-Мефодиевское мужское училище. За годы педагогической деятельности в училище он добился отмены телесных наказаний; старался искоренить

[3] Государственный архив Пермского края (ГАПК). Ф. 147. Оп. 1. Д. 625. Л. 61, 61 об.

зубрёжку; устраивал праздники, прогулки детей в лес; развивал самодеятельность. В 1900 г. при училище были открыты бесплатные смешанные вечерние классы и организованы воскресные чтения.

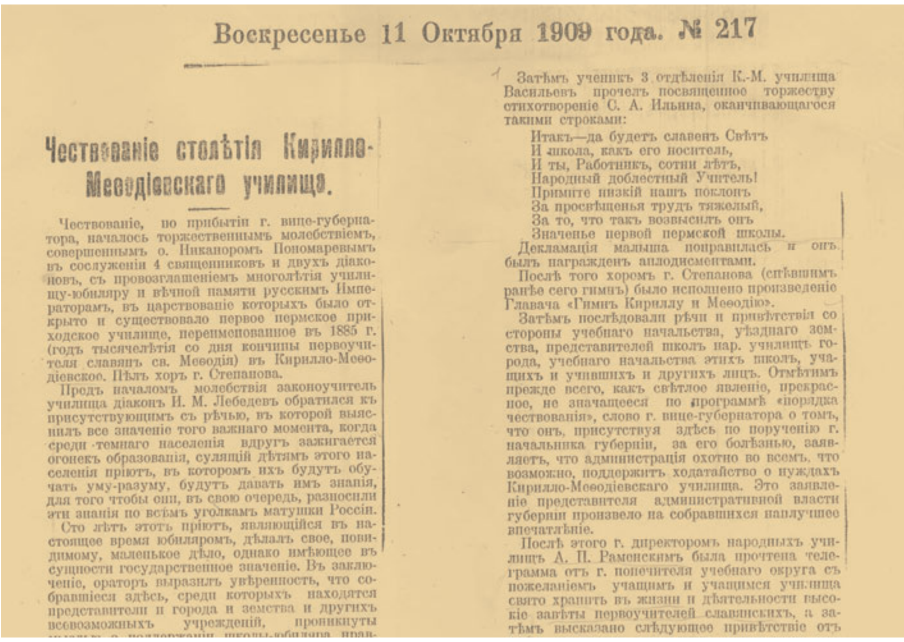
В 1909 г. заведующим Кирилло-Мефодиевским училищем был назначен С.Г. Замараев, разделявший просветительские идеи своего предшественника.

Директора начальных училищ имели серьезную поддержку в лице П.А. Рябинина, купца второй гильдии, городского головы с 1905 по 1917 г., который принимал активное участие в строительстве начальных школ, превратил Пермь в город с мощёными улицами, водопроводом, канализацией, электрическим освещением, телефонной связью. Только за 1906–1914 гг. бюджет города увеличился в два раза[4].

Празднование 100-летия училища

29 января 1909 г. газета «Пермские губернские ведомости» поместила письмо в редакцию бывших учеников и учащих Кирилло-Мефодиевского училища с призывом к сбору средств на строительство здания для Кирилло-Мефодиевского училища в честь его столетия. Созданная 1 февраля этого же года особая юбилейная комиссия приступила к подготовке торжеств. В программу подготовки входило среди прочих мероприятий «составление и издание истории училища за 100 лет».

Юбилейные торжества состоялись 1 октября 1909 г. Ученик 3-го отделения Пермского Кирилло-Мефодиевского мужского училища Васильев прочел стихотворение пермского поэта и журналиста С.А. Ильина, посвящённое старейшему после духовной семинарии и пермской гимназии учебному заведению города. Вице-губернатор произнёс торжественную речь, хор исполнил «Гимн Кириллу и Мефодию» В.И. Главача. Прозвучало поздравление директора народных училищ А.П. Раменского и попечителя учебного округа. Были зачитаны письма и телеграммы от бывших инспекторов народных училищ пермского уезда, от бывших заведующих учили-



Воскресенье 11 Октября 1909 года. № 217

Чествованіе столѣтія Кирилло-Меѳодіевскаго училища.

Чествованіе, по прибытіи г. вице-губернатора, началось торжественнымъ молебствіемъ, совершеннымъ о. Никаноромъ Пономаревымъ въ сослуженіи 4 священниковъ и двухъ діаконовъ, съ провозглашеніемъ многолѣтія училищу-юбиляру и вѣчной памяти русскимъ Императорамъ, въ царствованіе которыхъ было открыто и существовало первое пермское приходское училище, переименованное въ 1885 г. (годъ тысячелѣтія со дня кончины первоучителя славянъ св. Меѳодія) въ Кирилло-Меѳодіевское. Пѣлъ хоръ г. Степанова.

Предъ началомъ молебствія законоучитель училища діаконъ И. М. Лебедевъ обратился къ присутствующимъ съ рѣчью, въ которой выяснилъ все значеніе того важнаго момента, когда среди темнаго населенія вдругъ зажигается огонекъ образованія, сулящій дѣтямъ этого населенія пріютъ, въ которомъ ихъ будутъ обучать уму-разуму, будутъ давать имъ знанія, для того чтобы они, въ свою очередь, разносили эти знанія по всѣмъ уголкамъ матушки Россіи.

Сто лѣтъ этотъ пріютъ, являющійся въ настоящее время юбиляромъ, дѣлалъ свое, повидимому, маленькое дѣло, однако имѣющее въ сущности государственное значеніе. Въ заключеніе, ораторъ выразилъ увѣренность, что собравшіеся здѣсь, среди которыхъ находятся представители и города и земства и другихъ всевозможныхъ учрежденій, проникнуты

Затѣмъ ученикъ 3 отдѣленія К.-М. училища Васильевъ прочелъ посвященное торжеству стихотвореніе С. А. Ильина, оканчивающагося такими строками:

Итакъ—да будетъ славенъ Свѣтъ
И школа, какъ его носитель,
И ты, Работникъ, сотни лѣтъ,
Народный доблестный Учитель!
Примите низкій нашъ поклонъ
За просвѣщенья трудъ тяжелый,
За то, что такъ возвысилъ онъ
Значенье первой пермской школы.

Декламація малыша понравилась и онъ былъ награжденъ аплодисментами.

Послѣ того хоромъ г. Степанова (спѣвшимъ ранѣе сего гимнъ) было исполнено произведеніе Главача «Гимнъ Кириллу и Меѳодію».

Затѣмъ послѣдовали рѣчи и привѣтствія со стороны учебнаго начальства, уѣзднаго земства, представителей школъ нар. училищъ города, учебнаго начальства этихъ школъ, учащихъ и учившихъ и другихъ лицъ. Отмѣтимъ прежде всего, какъ свѣтлое явленіе, прекрасное, не значащееся по программѣ «порядка чествованія», слово г. вице-губернатора о томъ, что онъ, присутствуя здѣсь по порученію г. начальника губерніи, за его болѣзнью, заявляетъ, что администрація охотно во всемъ, что возможно, поддержитъ ходатайство о нуждахъ Кирилло-Меѳодіевскаго училища. Это заявленіе представителя административной власти губерніи произвело на собравшихся наилучшее впечатлѣніе.

Послѣ этого г. директоромъ народныхъ училищъ А. П. Раменскимъ была прочтена телеграмма отъ г. попечителя учебнаго округа съ пожеланіемъ учащимъ и учащимся училища свято хранить въ жизни и дѣятельности высокіе завѣты первоучителей славянскихъ, а затѣмъ высказано слѣдующее привѣтствіе отъ

Фрагмент статьи о юбилее училища в «Пермских губернских ведомостях»

[4] Пермские градоначальники: Сборник статей. Пермь, 2008. С. 73–74.

щем. Председатель пермской уездной земской управы А.М. Кирпищиков выразил уверенность, что «училище будет иметь собственный дом не далее, как через два года». Председатель научно-промышленного музея П.Н. Серебренников отметил тождество между музеем и училищем «в общей идее насаждения среди окружающего населения семян культуры». Бывший ученик училища А.Н. Ярославцев подарил коллекцию уральских минералов — «скромный дар в инвентарь будущего музея наглядных пособий при этом училище». Пришли с поздравлениями начальницы Мариинской женской гимназии и женской семинарии, заведующая вечерними женскими курсами, начальник железнодорожного технического училища.

Также пришли поздравить юбиляра учащиеся Ольгинского городского начального училища, двухклассного училища, Александровского училища. «От 5-го женского училища выступила депутация трёх девочек, из которых одна, милое дитя с симпатичным личиком, серьёзно и вдумчиво проговорила поздравление юбиляру. Славная девчурка была награждена аплодисментами и ласковыми улыбками окружающих». В промежутках между чтениями ученики Кирилло-Мефодиевского училища говорили речитативным хором стихи, содержащие привет школе и гимн ей. В интервалах хор исполнял пьесы «Слава» и «Светлой радостью горя».

В отчёте о торжествах в «Пермских губернских новостях» (11.10.1909) журналист С. И-н (С.А. Ильин) выразил признательность училищу от лица местной печати, «которой так часто приходилось на своих страницах уделять внимание этому старейшему в Перми рассаднику начального народного образования и говорить о многих и многих просветительных начинаниях, возникновение которых всегда бывало тесно связано с Кирилло-Мефодиевским училищем». В конце статьи он отметил: «Задача народной школы — служить не только рассадником первоначального образования, но и быть центром, фокусом, откуда лучи знания и добра распространялись бы на возможно широкий круг местного населения».

Здание к юбилею — памятник русскому средневековью

1 февраля 1909 г. в помещении уездной управы состоялось общее собрание учителей народных училищ Перми, бывших воспитанников Кирилло-Мефодиевского училища, родителей учеников этой школы. В программе стояло два основных вопроса: а) о порядке чествования в юбилейный день, б) о постройке или приобретении собственного здания[5].

Первые деньги на строительство нового здания — 300 рублей — в 1903 г. внёс купец-промышленник А.П. Кропачёв, бывший попечителем училища в течение 35 лет. В 1905 г. земская уездная управа поставила перед городской думой вопрос об отводе земельного участка под постройку собственного здания для училища, губернатор разрешил сбор средств через подписку. Уездное земское собрание ассигновало на постройку 3 тысячи рублей. Выбранная собранием юбилейная комиссия организовала сбор недостающих средств.

Пермская уездная земская управа инициировала проведение конкурса проектов здания для училища в Санкт-Петербурге и выделила 1000 рублей, в том числе

[5] Дом, подаренный еще в 1845 г. купцом Гильковым, необъяснимым образом перешёл в собственность земской уездной управы.

Здание Кирилло-Мефодиевского училища. Архитектор В.А. Кендржинский

400 — на первую премию. Конкурс в 1910 г. объявил граф П.Ю. Сюзор, председатель петербургского Общества архитекторов и художников. Победил проект В.А. Кендржинского под девизом «Три золотых круга», выполненный в неорусском стиле. Благодаря энергии Общества содействия начальному образованию весной 1911 г. началось и к зиме 1912 г. закончилось задуманное строительство.

Газета «Пермские губернские ведомости» 10 июля 1911 г. писала: «Третьего дня на торжественный акт закладки памятника-здания Кирилло-Мефодиевского земского приходского мужского училища на бесплатно отведенной городом усадьбе, на углу Большой Ямской и проспекта прибыли из Пермской уездной управы С.В. Ипанов, члены управы, директор народных училищ А.П. Раменский, учителя и учительницы народных школ, городской голова П.А. Рябинин и другие. После совершения водосвятного молебствия протоиереем Богородицкой церкви отцом Кудрявцевым пел хор певчих из Воскресенской церкви. Городское начальство С.В. Ипанов, С.М. Жебелев, городской голова П.А. Рябинин и другие лица положили крестообразно по несколько кирпичей по углам здания, была прочитана выгравированная на металлической доске надпись, в которой перечисляются участники торжества и время закладки здания училища, а также, что здание строится в память исполнившегося столетия училища. После этого доска была зарыта и замурована в пол сооружаемого здания. 8 января 1913 года здание-памятник торжественно освящено в честь 100-летнего юбилея»[6].

Ныне здание является памятником архитектуры, охраняется государством.

Просвещение и благотворительность

Благотворительность в народном образовании была широко распространена до революции. Купцы и промышленники жертвовали средства в пользу учебных заведений и отдельных учащихся, были членами попечительских советов и различных добровольных обществ, принимали участие в строительстве зданий, предназначенных для образовательно-просветительных учреждений. Не стала исключением в этом отношении и Пермь.

Почётный гражданин города Перми Н.В. Мешков пожертвовал к новому, 1912 году 500 рублей на библиотеку Кирилло-Мефодиевского училища. Техник губернского земства А.А. Оболенский пожертвовал 100 рублей. От рабочих Надеждинского завода Обществом содействия начальному образованию принято 250 рублей. При библиотеке Кирилло-Мефодиевского училища был создан музей-кабинет наглядных пособий стоимостью более 700 рублей. В Перми больше не было подобного кабинета.

[6] ГАПК. Ф. Р-1210. Оп. 1. Д. 7.

Детский читальный зал Общества содействия начальному образованию. 1913 г.

8 января 1913 г. был открыт детский читальный зал в новом здании. Первый детский читальный зал оборудован соответствующей мебелью, электрической установкой, необходимыми пособиями, книгами, детскими журналами, географическими картами, коллекциями, портретами писателей, картинами и прочим. А по стенам развешены плакаты: «Перед чтением книг мойте руки!», «Соблюдайте тишину!», «Не плюйте на пол!».

Инспектор М. Лысковский в статье «Детское царство» написал о бескорыстной и плодотворной деятельности пермских просветителей: «Слишком оригинально и ново было всё это. Слишком походило на Америку, заграницу. Роскошные, с раскрашенными картинками издания Девриена, Сытина и других. Всё население города относится к деятельности Общества с чрезвычайным сочувствием и глубоким уважением; как много хорошего может сделать человек, если он имеет душу живую, если в сердце его горит святой огонь любви к ближнему и если у него есть энергия и сила воли. Побольше бы таких людей на Руси»[7].

Социальная поддержка и здоровье

Юбилейная комиссия, состоявшая из учеников и учителей Кирилло-Мефодиевского училища, стараниями В.М. Шулепова, П.А. Матвеева и других общественных деятелей губернского города переросла к декабрю 1909 г. в Общество содействия начальному образованию, о деятельности которого уже говорилось выше. Общество, созданное в память 100-летнего юбилея мужского приходского училища, возглавил В.М. Шулепов.

Общество оплачивало обучение «недостаточных» (бедных) выпускников Кирилло-Мефодиевского училища в средних и других учебных заведениях. В 1914 г. для учащихся-бедняков Кирилло-Мефодиевского училища были организованы бесплатные завтраки, устроены 6 бесплатных утренников.

[7] ГАПК. Ф. Р-1210. Оп.1. Д. 5. Л. 31, 32; Д. 7. Л. 4.

Детская площадка в усадьбе училища

11 мая 1914 г. на территории усадьбы училища открыта бесплатная детская площадка (первоначально – для детей из бедных семей), которую за три года посетило 15 314 детей. Зимой 1915–1916 гг. здесь устраивали снеговые горы. Об устройстве летних и зимних площадок, о нехватке добровольных помощников писали «Пермские губернские ведомости»: «Учащаяся молодежь Перми не желает идти на помощь детским площадкам в отличие от Москвы и Армавира, где труд несут безвозмездно».

Дети распределялись по возрасту. Самые маленькие на столах лепили из глины и песка при помощи игрушечной посуды. Дети от 6 до 9 лет занимались играли в игры: «Китайские пятнашки», «Булочник и пирожок», «Хромая лисичка», «Живая цель», «Воробышек», «Семь сыновей» и др. Дети от 10 до 15 лет упражнялись в гимнастике и занимались разнообразными подвижными играми: крокет, «Итальянская лапта», «День и ночь». С двумя первыми группами детей занималась учительница Кирилло-Мефодиевского училища А.П. Зенцова, а со старшими – К.В. Мухина[8].

Первая лекция первого на Урале университета

В 1916 г. в Перми был учреждён первый на Урале университет. 1 октября состоялось его открытие, сначала как отделения Императорского Санкт-Петербургского (тогда Петроградского) университета, а в мае 1917 г. отделение преобразовано в самостоятельный университет. Празднования по случаю открытия университета продолжались с 1 по 3 октября. Учащиеся всех учебных заведений города были освобождены от занятий 3 октября по распоряжению В.Т. Шевякова, товарища (заместителя) министра просвещения, приехавшего в Пермь по поручению министра народного просвещения графа П.Н. Игнатьева[9].

Товарищъ министра народнаго просвѣщенія,–докторъ зоологіи,–**Владимиръ Тимофеевичъ Шевяковъ**, торжественно объявившій **1-го Октября 1916 г.** объ открытіи Пермскаго отдѣленія Петроградскаго университета и прочитавшій въ Перми первую университетскую лекцію.

4 октября 1916 г. в Кирилло-Мефодиевском училище В.Т. Шевяковым прочитана первая лекция по зоологии в первом на Урале университете. В здании училища разместились несколько кафедр медицинского отделения естественных наук при физико-математическом факультете (аудитории ботаники, зоологии и гистологии, кафедра анатомии). Тогда же, в октябре 1916 г., кафедру гистологии медицинского и физико-математического факультетов возглавил профессор А.А. Заварзин, впоследствии всемирно известный гистолог XX в. Кафедра анатомии выехала в 1917 г. Затем здание занимали историко-филологический и юридический факультеты. Занятия училища продолжались в старом здании.

[8] ГАПК. Ф. Р-1210. Оп. 1. Д. 7. Л. 15.

[9] Пермский государственный архив новейшей истории (ПермГАНИ). Личный фонд И.И. Лапкина. Ф. 3. Оп. 1. Д. 110, 111.

Кризис в управлении — кризис в образовании

16 декабря 1917 г. в Пермской губернии установилась советская власть, земство (местное самоуправление) было ликвидировано, его функции переданы Советам. Созданные при них отделы народного образования распространяли листовки с приглашением записывать детей в школы.

С 30 сентября 1918 г. согласно «Положению о единой трудовой школе РСФСР», принятому ВЦИК, городские начальные училища стали называться едиными трудовыми школами I ступени.

Восстановление Кирилло-Мефодиевского училища как образовательного учреждения началось в августе 1919 г. Сначала была восстановлена библиотека. 16 сентября 1920 г. начала работу единая трудовая советская школа I ступени имени III Интернационала (по воспоминаниям выпускников Кирилло-Мефодиевского училища на его здании была табличка с этим названием). На открытии школы присутствовал советский видный партийный и военный деятель Н.И. Подвойский, в то время — начальник Всевобуча (Всеобщего военного обучения).

Учительница А.И. Тверитина вспоминает: «Не было ни программ, ни учебников. Писали на старых учебных пособиях, на газетной бумаге. Перья и карандаши представляли большую редкость».

Назначенный заведующим школой В.М. Шулепов с горечью отмечал частую смену программ, нелепые поправки руководства к старым учебникам.

Рождение детского самоуправления

14 декабря 1919 г. в здании Кирилло-Мефодиевского училища был создан детский клуб «Муравейник». Девизом клуба стали слова «Мы, муравьи, трудиться любим, — иди работать к нам скорей!».

Здание действительно представляло собой настоящий муравейник. В канун второй годовщины социалистической революции (октябрь 1919 г.) открылся рабочий факультет при университете[10]. «Осенью 1921 г. большая часть групп размещалась в “Муравейнике”, здесь же, в чердачной комнате, размещалась и канцелярия. Учились тогда в детском клубе “Муравейник”. Ребятишек и рабфаковцев набито было в этом старом здании как муравьёв в куче», — вспоминал один из рабфаковцев.


Муравей-Чудодей
Издание непериодическое.
№ 8.
О ГОЛОДЕ.

Газета «Муравей-Чудодей». 14 декабря 1921 г.

Детский клуб развернул кипучую деятельность. Действовали различные кружки: политический, физический, драматический, хоровой, изостудия. Литературно-издательский кружок выпускал газету «Муравей-Чудодей» (20 июня 1920 г. вышел 1-й номер газеты). Началась экскурсионная работа: 7 июня 1920 г. состоялась первая поездка в Хохловку.

[10] Рабочие факультеты (рабфаки) – общеобразовательные учебные заведения (или подразделения учебных заведений), осуществлявшие в 1920–1930-е гг. подготовку в вузы молодёжи, не получившей своевременно среднего образования. – *Прим. ред.*

11 апреля 1921 г. при клубе «Муравейник» состоялась Первая детская конференция учащихся школ I ступени г. Перми, на которой обсуждали работу детского самоуправления. Из актива деткома (детского комитета) школы-клуба выросла первая школьная комсомольская организация в городе.

2 ноября в Перми открылась Вторая детская конференция, которая главное внимание уделила задачам пионерской организации. Конференция избрала городской детский комитет.

В протоколе школьного совета 22 ноября 1922 г. читаем:

1) Член гордеткома Л. Соломянская указала на то, что у учащихся масс после [I] конференции осталось мало впечатлений; и II конференция детям ничего не даст, надо решения конференции проработать в гордеткоме и донести до учащихся каждой школы.

2) Директор школы П.А. Матвеев, учителя Казаков, Иванов отметили, что нельзя ставить вопросы, противоречащие детской психологии, такие как проявления антагонизма по отношению к ученикам частной школы; вражда должна быть классовая, а не между отдельными личностями среди детей, такие выпады роняют достоинство нашей организации.

3) Все согласились с докладчиком тов. Седых о том, что I детская конференция проводилась взрослыми, постановление её не было проведено в жизнь, а II конференция действительно готовилась детьми и проведение её решений в жизнь — дело гордеткома.

Эксперименты в образовании

В далёкой Москве 18 октября 1918 г. по Положению «О единой трудовой школе РСФСР» введено всеобщее обязательное обучение. Осуществление же всеобуча произойдет повсеместно лишь после 1930 г., когда на XIV съезде ВКП(б) будет принято решение «О всеобщем обязательном начальном обучении».

А пока... Меткую характеристику ситуации в образовании дал А.С. Макаренко: «После Октября [1917] передо мной открылись невиданные перспективы. Мы, педагоги, так опьянели от этих перспектив, что уже и себя не помнили».

Опубликованный в 1920 г. учебный план назвал предметы для изучения в школах страны: физика, химия, биология, география, астрономия, язык и литература, общественные науки, искусство (пение, черчение, рисование), физическое воспитание, иностранные языки. Школы должны были иметь мастерские и рабочие комнаты, земельные участки при школах.

Увлекались иллюстративностью: лепкой, рисованием, драматизацией. Считали, что основа школьной жизни — производительный труд. Именно эта сторона жизни клуба-школы произвела неизгладимое впечатление на делегатов III конгресса Коминтерна. Об этом написал М. Бартель в книге «Красный Урал».

Обучение же было делом совести учителя и напрямую зависело от настроения группы учащихся. Протоколы заседаний школьного совета пестрят неутешительной информацией о срыве занятий, крайне низком уровне знаний. Единого учебного плана не было. А после смерти заведующего школой и клубом В.М. Шулепова школа вообще оказалась на грани развала.

С весны по осень 1922 г. остро стоял вопрос о закрытии школы-клуба, как не укладывающейся в стандарты «Положения о единой трудовой школе». Кроме некоторого оборудования двух кабинетов, естествознания и физико-математического да небольшого количества парт, в школе ничего не было. Помещения школы использовались рабфаком университета, и только вмешательство известного в Перми юриста П.А. Матвеева, активнейшего деятеля Общества содействия начальному образованию, человека с университетским образованием, спасло школу.


П.А. Матвеев

Начала нормального учебного процесса П.А. Матвеев добился в 1922–1923 учебном году. Его поддерживали опытные учителя: преподаватель немецкого языка М.В. Циммерман, преподаватель биологии, заведующий естественным кабинетом И.И. Казаков, преподаватель физики и руководитель физического кабинета Н.Н. Семовских, секретарь школьного совета М.П. Ферапонтова и ставшая впоследствии заведующей школой № 9 Н.Я. Богданова.

Из протокола отчётного собрания школы-клуба «Муравейник» 20 июня 1923 г.: «По распоряжению ГубОНО в минувшем году введена плата за учение в размере трёх рублей золотом с человека. Отмечена интенсивная работа литературно-драматического кружка, где художественное произведение сначала разбиралось детьми под руководством взрослых, а затем ставилось на сцене; улучшение успеваемости в группах, кроме старшей. Выпускное свидетельство получил только один ученик». Учительский коллектив принял решение об открытии летней школы. Работа летней школы оценена детьми на общем собрании: «Научили учиться и объединяться!» К концу учебного года в школе 116 человек.

Крупным событием было посещение школы А.В. Луначарским. В Книге почётных посетителей комиссар просвещения РСФСР написал: «“Муравейник” представляет собой редкий у нас опыт постановки школ с резко выраженным общественно-политическим уклоном. Впечатление от его работы — крайне благоприятное». Отметил также, что с одной политикой без естественных наук и других специальных знаний современная школа невозможна, «Муравейник» должен искать и найдёт среднюю линию. Сегодня это письмо хранится в Пермском краеведческом музее.

Эксперименты продолжались в 1923–1924 учебном году. Согласно утверждённой схеме построения комплексных программ школы I ступени содержание учебных предметов распределялось на три колонки: «Природа», «Труд», «Общество», отдельных предметов не было. В области методики преподавания заимствован Дальтон-план, применявшийся при лабораторных занятиях. Он потребовал составления свободного расписания, создания звеньев из 4–5 человек с письменным заданием на месяц (оказался хорош лишь для старших классов).

В 1923–1924 гг. Народный комиссариат просвещения включил Пермскую семилетнюю школу № 9 в число опытно-показательных учреждений. Летом 1924 г. Пермская семилетняя школа стала участницей областного съезда в Свердловске, а затем — Всероссийского съезда работников опытных учреждений в Москве.

Скаутинг и пионерия

Историческим центром формирования скаутских отрядов в России было Царское Село. Лорд Роберт Баден-Пауэлл, основатель этого мирового движения, в основу законов скаутов («Scouting for boys») положил легенды и предания мальтийского рыцарского ордена ионитов. Принципы скаутизма просты: «Долг перед Богом. Долг перед другими. Долг перед собой».

В Пермской губернии отряды скаутов зародились в начале Первой мировой войны. К 1917 г. в них состояло 397 человек, детей рабочих в них было немного. В России в 143 городах насчитывалось около 50 тыс. скаутов.

В газете «Освобождение России» от 17 мая 1919 г. в постоянной рубрике «Вопросы народного образования» появилась статья инструктора Е.О. Вильчинского «Бой-Ско[а]уты (юные разведчики)», которая указывает на то, что в Перми существовало Общество содействия организации мальчиков-разведчиков «Русский скаут». Одним из первых в Перми был отряд скаутов при Александровской мужской гимназии.

Во время гражданской войны скауты России разделились: одни пошли за белыми, другие – за красными.

Съезд Российского коммунистического союза молодежи в 1919 г. принял решение о роспуске скаутских отрядов. Но где же взять другие формы работы с детьми?

Н.К. Крупская пишет брошюру «РКСМ и бой-скаутизм» с рекомендациями применения методов скаутизма к другому политическому содержанию. Вторая Всероссийская конференция РКСМ 19 мая 1922 г. создала пионерскую организацию.


1927 г. 23 января
ВСХОДЫ КОММУНЫ
Еженедельная газета юных пионеров Урала
У Ленина надо всем учиться!
По-Ильичевски
Тесней, отряды!

«Всходы коммуны». Еженедельная газета юных пионеров Урала. 23 января 1927 г.

Пермская газета «Звезда» 11 ноября 1922 г. сообщала, что в детском клубе «Муравейник» были созданы первые три патруля юных пионеров. На заседании школьного совета был заслушан доклад о пионерах и отведена для них особая комната. Вспоминает бывшая ученица Т.Ф. Зубкова: «Мне не довелось быть октябрёнком. В 1922 г., когда я поступила в школу при клубе “Муравейник”, там организовывали отряд “волчат”. Мы собирались в зале “Муравейника” после уроков, пели, маршировали, слушали рассказы вожатого. Мы приветствовали его своим “салютом”: складывали пальцы правой руки наподобие мордочки волчонка». Терминология скаутских отрядов, их правила вошли в Законы юных пионеров: «Разведчик верен рабочему люду. Разведчик правдив, чист в мыслях, словах и делах. Разведчик – друг и брат всякому другому разведчику»[11].

12 февраля 1923 г. губернский комитет комсомола решил именовать губернское объединение пионеров «Пермский губернский легион юных пионеров имени Карла Либкнехта». Начальником легиона утверждена 19-летняя Муся Колокольникова. Действует система патрулей, приказов, организация носит военизированный

[11] Газета «Муравей-чудодей», 16 декабря 1922 г.

характер. Пионерский вожак Колокольникова признавалась: «Брали методические скаутские указания, носящие характер буржуазного воспитания, и придавали им новый коммунистический дух».

В первых числах июня 1923 г. легион перешёл на новую систему: звено, отделение, отряд. М.К. Колокольникова стала называться ответственным секретарем губернского детского бюро. Ей подчинялись четыре крупнейшие дружины: при Мотовилихинском заводе — имени Красного Креста, в Разгуляйском районе — имени Спартака, на Заимке — имени КИМ (Коммунистического интернационала молодежи) и при школе-клубе «Муравейник» — дружина имени Коминтерна. Первый пионерский отряд им. Коминтерна был организован в школе-семилетке им. III Интернационала. Это — первая пионерская организация не только на Урале, но и одна из первых в стране[12].

В Перми начался бурный рост пионерских отрядов. 1 мая 1923 г. отряд имени Коминтерна участвовал в первом параде легиона юных пионеров. Выходцы из актива «Муравейника» К. Белоусов, Я. Шадрин стали организаторами пионерского движения в городе и ряде уездов Пермской губернии.

8 февраля 1924 г. на Первой окружной Пермской конференции пионеров клуб «Муравейник» был реорганизован в Центральный пермский городской детский пионерский клуб.

Имени великого поэта

13 февраля 1937 г. постановлением президиума Пермского городского совета в ознаменование столетней годовщины со дня смерти великого русского поэта образцовой школе № 9 г. Перми присвоено имя А.С. Пушкина. В Пермском театре оперы и балета состоялось торжественное заседание городского Пушкинского комитета, посвящённое 100-летию со дня смерти А.С. Пушкина[13].

Урок литературы

В президиуме торжественного заседания рядом сидели Герой Советского Союза В.П. Чкалов и директор орденоносного завода им. Сталина орденоносец И.И. Побережский. Знаменитый летчик посетил завод № 19, самолёты с двигателями которого испытывал.

Герой страны, кумир девчонок и мальчишек побывал и в школе № 9. «В.П. Чкалов приехал к нам на лимузине М-1, в то время это была самая сильная и комфортабельная машина. Явившись в школу в толстом шерстяном свитере и меховых унтах выше колен, приземистый и коренастый, Чкалов произвёл на нас, ребят, огромное впечатление», — вспоминал инженер Кустов, выпускник 1937 г.

В честь встречи со знаменитым летчиком дети устроили концерт: поставили спектакль, декламировали стихи Пушкина, пели хором и соло, юные поэты Миллер, Лобашов, Матвеев читали свои стихи.

---

[12] ПермГАНИ. Ф. 600. Оп. 1. Д. 60. ЛЛ. 1,2,8; *Шободоева А.* Российский скаутинг: история, теория, практика. Омск, 1995. С. 5, 8, 12, 14, 16, 19.
[13] Газета «Звезда», 15 февраля 1937 г.

Эвакогоспиталь № 2573

Во время Великой Отечественной войны в нынешнем здании школы № 9 размещался эвакуационный госпиталь № 2573. Сюда стали поступать красноармейцы с ранениями в грудную клетку. На первом этаже располагался пищеблок и санпропускник. На втором, третьем и четвёртом этажах — палаты. На месте современного кабинета биологии — операционная.

Начальником эвакуационного госпиталя был назначен доктор медицинских наук, профессор М.А. Коза. Основатель уральской школы патологоанатомов, создатель лучшего на Урале музея с богатейшей коллекцией препаратов, он стоял у истоков создания онкологической службы края. Госпиталь специализировался по ранениям грудной клетки. Одним из лучших был ведущий хирург Н.И. Григорьев. С самого начала организации эвакогоспиталя в нём работала инструктором лечебной физкультуры учительница физической культуры школы № 9 В.С. Клянчина.

Врачи и медсёстры работали по 12 часов в сутки. В этом госпитале в годы войны среди других учащихся оказывали помощь раненым ученицы школы Рита Ганина (впоследствии преподаватель литературы), Валя Вахрушева (впоследствии учительница начальных классов нашей школы В.А. Зиновьева). Валентина Александровна вспоминала: «Когда началась война, я закончила 6 классов. В 7-й класс мы пришли в очень грустном настроении. У многих отцы, братья ушли на фронт. Каждый учебный день начинался с освещения событий на фронте. Сводки были очень тревожные. Горько было слушать о том, как советские воины оставляли города и села. Учащиеся старших классов ежедневно по графику ходили в госпиталь. Часто приходилось помогать на кухне, стирать бинты, мыть аптечную посуду, убирать палаты, писать письма. И, конечно, раненые очень любили концерты, в которых участвовали и ученики младших классов. За помощь учащиеся получали благодарности, и вслед им неслись слова раненых: "Большое спасибо!"»

«На месте спортплощадки за школой был огород, где выращивали картофель для раненых. Над ранеными шефствовали женщины. Они приносили в госпиталь уху из свежей рыбы, солёную капусту, собирали хвою сосен и варили из неё отвар. Моя прабабушка Анна Трофимовна в июне 1941 г. была призвана в армию и направлена на организацию госпиталя, находившегося в здании нашей школы», — писал в сочинении Шляпников Денис, ученик 10 «Б» класса.

7 мая 1992 г. состоялось открытие мемориальной доски на здании нашей школы в память о военном госпитале № 2573.

В годы войны выпускницы школы трудились в госпиталях страны: М.А. Ланкова (госпиталь № 1017, Ленинград), Н.И. Мошева (зав. отд. военного госпиталя, Кировская область) и другие. В группе учёных по созданию вакцины против сыпного тифа работала Л.В. Крюгер.

«На войну из нашего 10-го класса (выпуск 1940-го, он был один) ушли все мальчики и 3 девочки. Никто из них не вернулся», — вспоминала председатель учкома Т.Н. Силина.

Старые и новые традиции

В 1951–1952 учебном году школа переехала в здание, построенное специально для неё ещё в 1939 г. (архитектор Н.А. Шварев), по адресу: Комсомольский проспект, 45. Причин для задержки в переезде было много. В городе не хватало административных зданий, во время войны здание школы было занято госпиталем, затем — НКВД–УМВД, одна из структур которого — паспортный стол — выехала из здания только в 1953 г.

Школьный духовой оркестр. 1952 г.

В 50-х годах родилась традиция проводить праздники «За честь школы». В них активно участвовали родительский комитет и педагоги: школе были подарены инструменты для оркестра, книги для библиотеки, проекционный фонарь.

В 1957–1958 учебном году родилась ещё одна традиция: в день приёма в пионеры сажать деревья. 89 лучших учащихся 2–4-х классов приняты в пионеры. Ребята проводили пионерские сборы. 5 ноября 1957 г. прошёл сбор «Наш мир рождён большевиками» — встреча с участниками революционного восстания состоялась у памятника борцам революции 1905 г.

В 1959–1960 гг. традиционными стали смотры художественной самодеятельности, пушкинские дни в феврале. Прошёл вечер «Драматургия Пушкина». Руководитель драматического кружка В.М. Мычелкина с восьмыми классами поставила сцены из «Каменного гостя». С.А. Гиндина с шестиклассниками подготовила спектакли «Сказка о рыбаке и рыбке», «Сказка о попе и работнике его Балде». Дети сами сделали костюмы, подготовили декорации.

Этот учебный год был удивительно творческим: столетний юбилей А.П. Чехова отмечен вечером с инсценировкой «Предложения», художественным чтением отрывков из «Мальчиков», «На даче»; на литературном вечере ко дню рождения Н.В. Гоголя ожили сцены из «Ревизора», «Мёртвых душ»; прошли литературные вечера к дням рождения М. Исаковского, А. Твардовского.

Под руководством К.А. Нынь работал кружок английского разговорного языка. В 1–8-х классах — драматические кружки, во 2–9-х — химический. Каждый ученик мог найти занятие по интересу. Кружок занимательной математики — для 6–7-х классов; математический кружок для 10-х классов помог ученикам занять первое место на городской математической олимпиаде. Для девочек работал кружок кройки и шитья под руководством учителя домоводства Н.С. Шутовой. Стрелковый кружок организовывал походы, экскурсии, встречи в войсковой части, в ДОСААФ.

Марш энтузиастов

Шестидесятые годы XX века — удивительное время подвижников, энтузиастов, творцов во всём, в том числе, и в деле просвещения. При крупнейших университетах создаются физико-математические интернаты, проводятся первые всесоюзные олимпиады, открываются заочные школы.

Начинается реформа образования. В Областном отделе народного образования решается вопрос о создании в Перми классов с углублённым изучением математики и физики. Выбор падает на школы № 9, 17 и 102. Но при школе № 9 не было производственного участка, обязательного для средней школы, поэтому вышел приказ гороно о переходе школы на восьмилетнее образование.

В кабинете машиноведения. 1950-е гг.

Усилиями коллектива единомышленников — профессора университета Ф.А. Бынова, секретаря городского комитета партии А.С. Мелешкова, директора электроприборного завода П.Н. Попова и многих других — был создан производственный участок для группы чертёжников и лаборатория по радиоэлектронике и телемеханике, базой которой стал цех по ремонту телевизоров.

Педагогический коллектив школы: учитель физики В.И. Вершинин, завуч, учитель математики В.П. Твердохлебова, учителя математики Г.П. Зайцева (впоследствии заслуженный учитель школы РФ) и Г.С. Царева, учитель физики А.Н. Новоселицкая, пришедшие из университета преподаватели физики О.Н. Кордун и С.Н. Голубина. Школе с такими педагогами можно было доверить «углублёнку».

В 1968 г. в девятой школе открыты первые физический и математический классы. В физическом классе изучался курс радиоэлектроники, радиомонтажный практикум проходил в ПГУ под руководством Г.С. Хлебутина.

Лабораторная работа. 1956 г.

Учащиеся изготовили первую в СССР электронную демонстрационную доску для сопровождения шахматных турниров. В 1969 г. она экспонировалась на ВДНХ.

В 1986 г. в журнале «Математика в школе» была опубликована четырёхлетняя программа углублённого изучения математики. Учителя математики и физики убедили тогдашнего директора школы, заслуженного учителя школы РФ Л.И. Баландину в том, что «девятка» не может оставаться в стороне от эксперимента. Классы были созданы. Математику в них стала вести Г.С. Царева, а физику — Л.Д. Мартынова. Инициатором начала работы Областной заочной физико-математической школы стал А.А. Корзняков (впоследствии заслуженный учитель школы РФ).

«АГАТ»: ШКОЛЬНЫЙ КООПЕРАТИВ

Этого события с нетерпением ждали все — и учителя, и ученики. По школе ходили самые невероятные слухи. Серьезные молодые люди в пионерских галстуках, напуская на себя вид умудренных опытом профессионалов, снисходительно давали пояснения: «По основным техническим характеристикам «Синклеры» и «Эпплы» значительно превосходят...» Их оппоненты, горячась и волнуясь, были в своих суждениях куда более категоричны: «Куда там «Амахам»...» Но и те, и другие многое отдали бы за то, чтобы хоть краешком глаза заглянуть за дверь, на которой красовалась табличка «Кабинет вычислительной техники».

В один прекрасный день эта дверь распахнулась, и взору девятиклассников, пришедших на очередной урок программирования, предстали тринадцать новеньких, сверкающих персональных компьютеров «Агат». Обошлось без речей и оркестров. В кабинете вычислительной техники начались обычные уроки. Хотя не совсем обычные. На многие ли уроки приходят в класс со звонком с предыдущего урока и никак не хотят уходить после звонка? У многих ли кабинетов вечно толпятся ученики и младших, и старших классов, которых разбирает любопытство: что за удивительные вещи творятся в этом чудесном кабинете? Ребят как магнитом притягивает волшебный мир ЭВМ.

Тогда и возникла мысль объединить любознательных мальчишек и девчонок, стремящихся любой ценой поскорее занять место за пультом «Агата», в компьютерный клуб. И вот уже создан учредительный совет, выработан первый устав, и первый президент клуба Костя Ширинкин торжественно объявляет общему собранию, что в средней школе № 9 имени А. С. Пушкина начал свою деятельность компьютерный клуб, которому дано имя «Агат».

Более 90 ребят объединил он в своих рядах. Восемь рабочих групп получили свои первые задания и приступили к работе. Обучение ребят 5—8-х классов работе на ЭВМ, проведение компьютерного всеобуча, создание математического обеспечения кабинета вычислительной техники — вот первые задачи, которые призван был решить клуб.

Не все выдержали напряженного режима работы (двухразовые еженедельные занятия в кабинете, обязательное участие в днях здоровья по средам, отстранение от занятий в случае появления текущих «двоек» и «троек») и были вынуждены уйти из клуба. Но общая численность его членов не уменьшилась, а увеличилась за счет новых ребят. Была образована девятая рабочая группа — экспериментальная. В нее вошли 32 первоклассника.

Пришли и первые успехи. Руководители рабочих групп Игорь Маркин и Лариса Агеева становятся победителями городской олимпиады по информатике. Вице-президент клуба Сережа Зотов получил в Свердловске на I Всесоюзной олимпиаде по программированию Диплом II степени. Усилиями членов клуба в кабинете появились первые обучающие и контролирующие программы по математике, информатике, физике, химии, русскому языку. Для учащихся школ и училищ города проведено около шестидесяти экскурсий.

Реализована еще одна идея: клуб перешел на частичное самофинансирование. На базе клуба создан школьный кооператив, пропагандирующий всеобщую компьютерную грамотность. Только за первые две недели своего существования кооператив принял более полутора тысяч посетителей и перевел на счет школы свыше 500 рублей.

А впереди у компьютерного клуба «Агат» — претворение в жизнь новых идей, смелых планов.

А. КОРЗНЯКОВ,
Г. ОДИНЦОВА,
учителя школы № 9.

Статья в газете «Учитель» Пермского педагогического института. 29 августа 1988 г.

В 1987 г. в школах области появились первые компьютеры «АГАТ». Ребят как магнитом притягивает волшебный мир ЭВМ. В школе открылся компьютерный клуб. Пришли первые успехи. Призёрами первых всесоюзных олимпиад по информатике стали Сергей Зотов и Алексей Гузеев.

В 1990 г. по просьбе родителей и детей, мечтавших о профессии врача, в школе были скомплектованы химико-биологические классы. Авторские программы для этих классов были разработаны учителем химии, завучем школы Г.Д. Постаноговой и учителем биологии Т.Е. Огольцовой на основе идей программ IB DP (International Baccalaureate Diploma Programme).

Директору школы Л.И. Баландиной удалось добиться, чтобы базой для проведения практикумов в этих классах выступили химический и биологический факультеты ПГУ.

Декан химического факультета, выпускница и золотая медалистка школы № 9 З.Д. Белых организовала проведение спецкурсов и лабораторных занятий на кафедрах аналитической химии, биохимии, органического синтеза. Из 28 выпускников этого класса в 1992 г. в Пермскую государственную медицинскую академию поступило 22 человека, в 1994 г. из 26 – 19. Учителю химии Г.Д. Постаноговой был вручён уникальный документ Пермского государственного университета – сертификат, согласно которому отметка, поставленная как итоговая в школе, засчитывалась как вступительная в ПГУ!

Учитель химии Г.Д. Постаногова
с учащимися. 1990-е гг.

С 1994–1995 учебного года пропедевтический курс химии был начат в 6 классе по специализации «биология». Работу учащихся организовала учитель биологии С.П. Шевченко, научными руководителями были сотрудники Областного управления лесами. Практика 1995 г. с основным направлением «спелеотуризм» прошла в пеших, пеше-горных, лыжных походах под руководством учительницы биологии Т.В. Лагуновой, полевая практика по ботанике прошла в Усть-Качке.

Одновременно шла работа по основному, физико-математическому, направлению. В 1992 г. в школе был создан первый небольшой класс, где ребята осваивали программу углублённого изучения и математики, и физики. Эксперимент оправдал себя: все его ученики стали победителями и призёрами областных олимпиад по математике, физике и информатике.

С первых лет всесоюзных и всероссийских олимпиад ученики школы становились их победителями. Это Сергей Ландо (1971, 1972 – математика), Аркадий Поносов (1973, 1974 – математика), Денис Галицкий (1985, 1986), Дмитрий Буланов (1988 – химия); Илья Богданов (1993, 1994) и Александр Романов (1994) – победители российской олимпиады по математике; Дмитрий Любшин – призёр международной олимпиады по физике (1994).

В 2000 г. был сформирован первый в Пермской области 7-й класс с углублённым изучением математики, физики и информатики. Сейчас такие классы работают во всех специализированных школах края.

Год геометрии в школе № 9 был ознаменован исключительно значимым событием. Школой была инициирована и в сентябре 2004 г. проведена совместно с Пермским государственным педагогическим университетом и Департаментом образования Пермской области XII конференция Российской ассоциации учителей математики «Математическое образование в современных условиях». На конференции были обсуждены актуальные проблемы математического образования, в частности геометрического, и вопросы деятельности ассоциации. В конференции приняли участие представители Министерства образования и науки РФ, авторы учебников и пособий по математике, методисты, редакторы методических и педагогических изданий, сотрудники научно-исследовательских институтов, а также представители ассоциаций учителей математики стран ближнего и дальнего зарубежья.

В Просветительском центре им. И.Ф. Шарыгина

Важным событием конференции стало открытие Просветительского центра им. И.Ф. Шарыгина, выдающегося педагога и геометра, члена исполкома Международной комиссии по математическому образованию, участника международных конгрессов, доброго друга школы.

«Особая благодарность за память о нашем друге и соратнике И.Ф. Шарыгине. Нигде в России нет центра имени Игоря Фёдоровича, а у вас есть, и будет работать во славу просвещения российского. Спасибо!» – отметили 23 сентября 2004 г. в Книге для почётных гостей зав. отделом журнала «Квант» А.А. Егоров и заместитель директора ОЛ ВЗМШ при МГУ Ж.М. Раббот.

С 1991 г. существует летний математический лагерь. Бессменный его директор с 1995 г. – О.Н. Вязьмина. Ученики 7–10-х классов отдыхают, закаляются, увлечённо занимаются математикой и физикой, ставят эксперименты, участвуют в математических и физических олимпиадах, различных интеллектуальных играх. Выпускники школы, студенты пермских и московских вузов становятся помощниками педагогов и руководителями спецкурсов.

Математический лагерь «Буревестник-2008»

Летом 2001 г. в лагерь были приглашены ребята из школы № 17 г. Перми, активные участники математического семинара, функционирующего на базе нашей школы. Опыт совместной работы и учёбы позволил реализовать проект создания городского физико-математического лагеря.

Школа проводит городские турниры юных математиков и юных физиков, успешно участвует в конкурсе журнала «Квант», в Кировском турнире математических боёв, в международном турнире «Кубок памяти А.Н. Колмогорова», в олимпиадах различного уровня.

Руководителями ученических исследовательских работ являются педагоги школы, а также преподаватели и сотрудники пермских вузов. Исследовательские работы учащихся Андрея Заболотных (по математике, 2003 г.), Лизы Куликовой и Кирилла Остаповича (по физике, 2009 г.) удостоены дипломов III степени на научно-практической конференции «Старт в науку» Московского физико-технического института.

Авторские задачи учителя геометрии Т.К. Каменевой и учащихся Арсения Козлова и Александра Урмузова под названием «Игры с золотым треугольником» были представлены на конференциях МФТИ и СУНЦ им. А.Н. Колмогорова при МГУ и стали лауреатом областной научно-практической конференции. В 2008 г. эта работа выпущена издательством «Чистые пруды» (Москва) как пособие по геометрии «Золотой треугольник в задачах».

Пермская художественная галерея на свои средства предоставляет детям и их педагогам экспозиционные площади и творческие мастерские на ежегодной международной выставке «Арт–Пермь». Удивительно гармонично вписываются в необъятные своды выставочного комплекса «Пермская ярмарка» огромные многогранники, исполненные детьми на уроках геометрии, или японские храмовые таблички с геометрическими задачами.

Победы, успех, авторитет – это приятно, но главное, что вот уже более 40 лет, каждый год, приходят в наши классы с углублённым изучением физики, математики, информатики мальчики и девочки осваивать азы трудных наук.

Вернуться к содержанию

Перелистывая страницы журнала: очерк истории «Математики в школе» (Часть 2)[1]

Василий Михайлович БУСЕВ
сотрудник Научной педагогической библиотеки им. К.Д. Ушинского,
vbusev@yandex.ru

Во власти реформ (1958–1985)

Идея политехнизации обучения, несмотря на утопичность, не умерла спустя некоторое время после XIX съезда КПСС, а, наоборот, получила дальнейшее развитие: в 1958 г. вышел закон «Об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования СССР». Согласно закону, обучение в средней общеобразовательной школе планировалось связать с производственным трудом путём вовлечения учащихся в работу цехов предприятий, колхозов, совхозов. Фактически это был ренессанс идей политехнизации начала 1930-х гг. Система образования должна была подвергнуться перестройке. Основой среднего образования объявлялась 8-летняя общеобразовательная школа (взамен прежней семилетней), дальнейшее образование выпускник восьмилетки мог получить или в вечерних школах сельской и рабочей молодежи, одновременно работая на производстве, или в общеобразовательных школах с производственным обучением (срок обучения 3 года).

Перестройка системы образования поставила вопрос о создании новой программы по математике, которая должна была заменить программу 1954 г., утверждённую после XIX съезда КПСС и частично учитывавшую веяния времени. В отличие от конца 1930-х гг., было решено организовать дискуссию, начало которой положила статья В.Г. Ашкинузе, В.И. Левина и А.Д. Семушина «О перестройке программ по математике в свете новых задач средней школы» (1959, № 1). Главные предложения авторов: изменить порядок изучения обыкновенных и десятичных дробей, больше внимания уделять приближённым вычислениям, ввести сведения о производной, ликвидировать самостоятельный курс тригонометрии. Статья подверглась критике на страницах журнала, после чего был опубликован проект новой программы (1959, № 4), который также обсуждался читателями журнала (1959, № 6; 1960, № 1, 2). Из материалов дискуссии видно, что проект программы был встречен учителями более настороженно (и даже враждебно), чем статья, положившая начало дискуссии: педагоги предлагали не спешить, всё обдумать и провести экспериментальную работу. Разумеется, эти предложения не могли быть учтены: инициатор реформы Н.С. Хрущёв требовал немедленных действий согласно его указаниям[2]. Программа по математике восьмилетней школы была опубликована (1960, № 5).

---

[1] Окончание. Начало см. в № 3, 2009.

[2] См.: *Глейзер Г.Д., Черкасов Р.С.* Центр творческих усилий педагогов. 1993. № 5, 6. Здесь и далле в ссылках название журнала «Математика в школе» опускается.

Обсуждение программ для старшей (трёхлетней) школы было продолжено (1960, № 5), но носило скорее формальный характер, чем содержательный: в ответной статье на замечания педагогов В.Г. Ашкинузе и А.Д. Семушин продолжали отстаивать свои намерения ввести элементы дифференциального исчисления и построить курс геометрии на основе идеи геометрического преобразования. Программа трёхлетней школы была вскоре опубликована (1961, № 1).

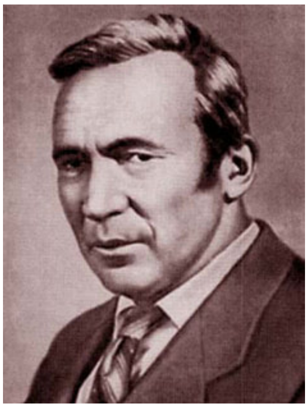
Но составления и публикации программ было, очевидно, недостаточно для перестройки работы школы. Требовалось создать новые учебники и методические рекомендации. Написать и апробировать пригодные для школы учебники в столь короткое время было делом невозможным. Тем не менее, попытка ввести новый учебник геометрии (В.Г. Болтянского и И.М. Яглома) имела место, но она провалилась: через год учебник был из школ изъят. Проще оказалось организовать методическое сопровождение политехнизации. Действительно, ведь под рукой был журнал «Математика в школе», который можно было быстро подключить к выполнению этой задачи. Что и произошло.

Отметим, что наряду с разработками учителей-практиков журнал всё больше печатал статьи известных (или впоследствии известных) методистов и авторов школьных учебников: Н.Я. Виленкина, К.И. Нешкова, Н.И. Сырнева, А.И. Фетисова, С.И. Шварцбурда, И.М. Яглома. Содержание их статей имело чёткую направленность: дать учителю материал для работы по новым программам. Одновременно редакция журнала стала помещать довольно много материалов по методике работы в вечерних школах, школах рабочей молодежи. Впервые за всю историю журнала задачи с техническим содержанием и их решения стали помещаться в отделе «Задачи».

Из всего сказанного видно, что журнал из средства обмена опыта между учителями стал превращаться в инструмент обслуживания реформы. Окончательно эта функция была за ним закреплена в следующую реформу, которая давно уже была задумана учёными, желавшими сблизить школьную математику с наукой. Реализовать свои замыслы они смогли после отставки Н.С. Хрущёва в 1964 г.

Согласно воззрениям организаторов реформы А.И. Маркушевича и А.Н. Колмогорова, школьный курс математики следовало перестроить коренным образом так, чтобы учащиеся усваивали главные идеи современной математики – идеи множества, функции, геометрического преобразования. Эти мысли находили отклик и у других математиков, считавших современный им школьный курс математики во многом архаичным.

Как это уже не раз было в истории школы и математического образования, быстро выяснилось, что задачи поставлены грандиозные, а ресурсов для их выполнения катастрофически не хватает (в первую очередь, времени). И реформа пошла по накатанной дороге: не спросив мнения педагогов о целесообразности реформы, им предложили обсуждать придуманные далёкими от школы учёными идеи. В результате обсуждения был составлен объём знаний (1965, № 2) и комментарии к нему А.Н. Колмогорова и И.М. Яглома (1965, № 4). Затем появился проект новых программ (1967, № 1), который в течение года обсуждался на страницах журнала и подвергся значительной критике педагогов-практиков. Новая программа без существенных отличий от проекта 1967 г. была опубликована в начале 1968 г. (№ 2). Переход на новую программу должен был начаться с 1970/71 учебного года. Как и в предыдущую реформу, за несколько лет предстояло провести колоссальную работу, и журнал практически полностью переключился на решение неотложных задач (возможно, в этом свою роль сыграло и то, что главный редактор Р.С. Черкасов активно поддерживал реформу).



А.Н. Колмогоров

Страницы журнала наводнили статьи А.Н. Колмогорова[3], А.И. Маркушевича и других математиков, публиковались главы из учебников и методических пособий для учителя, материалы для факультативных занятий, разработки учителей-энтузиастов, поддерживавших реформу. Вся эта огромная махина работала на то, чтобы сломить сопротивление консервативных учителей и снабдить их хоть какими-то материалами. Это помогало не всем. Один из участников тех событий О.С. Ивашев-Мусатов свидетельствует[4], что квалифицированные учителя старшего поколения, не выдержав испытания современной математикой, стали уходить из школы. Об этом же пишет Н.А. Курдюмова[5]. Педагогов можно понять: опытному учителю-практику, добивавшемуся во времена стабильности хороших результатов, трудно смириться с тем, что без видимых причин ему предлагают все наработанные материалы выбросить и за год-два научиться заново тому, как и что действительно нужно преподавать.

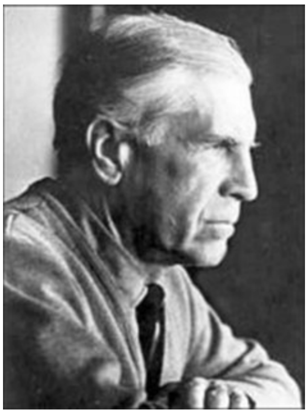
Реформа математического образования серьёзно изменила журнал. Окончательно ушли в прошлое солидные разработки учителей, основанные на многолетнем опыте. Практически исчезли методические дискуссии. Одной из последних дискуссий стало обсуждение новой терминологии школьного курса геометрии, предложенной А.Н. Колмогоровым. Он посчитал неуместным использовать термин «равенство» применительно к фигурам (поскольку в теоретико-множественном смысле равенство – это совпадение) и ввёл новый термин «конгруэнтность» (1970, № 4). Можно только догадываться о том, как это предложение было воспринято рядовыми учителями. Зато мы точно знаем, что против него выступил Н.Я. Виленкин (1972, № 6), который привёл вполне убедительные аргументы (отвергнутые, впрочем, оппонентом). А.Н. Колмогоров также предложил ввести новые обозначения: (AB) – прямая AB, $[AB]$ – отрезок AB, $|AB|$ – длина отрезка AB и т.д. Любопытно отметить, что сам журнал «Математика в школе» при публикации статей еще долго не соответствовал этим указаниям. Главы из пробного учебника по геометрии (один из соавторов – А.Н. Колмогоров) публиковались с новой символикой, а обычные статьи нет. Окончательно к новым обозначениям журнал перешел лишь с первого номера 1974 г.

[3] В частности, по его инициативе была введена новая рубрика «Научные основы школьного курса математики». Рубрика оказалась мертворожденной и вскоре исчезла.

[4] *Ивашев-Мусатов О.С.* Начала анализа для школьников. М.: Илекса, 2007. С. 4.

[5] *Курдюмова Н.А.* Воспоминания учительницы о Колмогоровской реформе // Архимед. 2007. Вып. 3. С. 33.

Результаты реформы известны: она окончилась полным провалом. Отдельные элементы задуманной конструкции в дальнейшем удалось сохранить (например, основы высшей математики), но в целом перестройка не удалась. К концу 1970-х гг. стало ясно, что реформа зашла не в ту сторону: вместо красивого здания школьной математики на новом фундаменте получилось что-то совсем другое, вызывавшее критику даже у сторонников реформаторов (например, у Б.В. Гнеденко). Что уж говорить о тех, кто недолюбливал А.Н. Колмогорова. Неудачи реформы дали возможность отдельным лицам перехватить инициативу и заняться «наведением порядка» в школьном математическом образовании. Чем они не преминули воспользоваться. Ошибки руководителей реформы (например, громоздкие определения и неудачная терминология) были использованы как мощное оружие против них.



Л.С. Понтрягин

Во главе контрреформы встал математик А.Н. Тихонов. В совместной статье с В.С. Владимировым и Л.С. Понтрягиным (1979, № 3) он подверг критике реформу, особенно досталось понятиям современной математики. Критика затем была продолжена Л.С. Понтрягиным в журнале «Коммунист» (1980, № 14), что уже не оставляло никаких шансов А.Н. Колмогорову и его команде на дальнейшее реформирование школьного образования.

В начале 1980-х гг. учебники геометрии были заменены учебником А.В. Погорелова, который поддерживал Л.С. Понтрягин; учебники алгебры и алгебры и начал анализа переработаны. Главному редактору журнала Р.С. Черкасову, несмотря на его несогласие с остановкой реформы, не оставалось ничего другого, как переориентировать методический отдел журнала на поддержку нового учебника геометрии и обновлённых учебников алгебры.

Последней реформой рассматриваемого периода стало введение в школы микрокалькуляторов и другой вычислительной техники, но эту реформу мы обойдем стороной, поскольку на журнал она не имела такого большого влияния как предыдущие реформы.

Ветры перемен (1960-е, 1980-е годы)

До сих пор в изложении мы старались придерживаться хронологии, но теперь вернёмся немного назад, в начало 1960-х гг. Ведь пока что на это время мы смотрели только с точки зрения реформ, и от наших глаз остались скрытыми другие события в жизни школы и журнала той поры.

Недолгая оттепель сыграла на руку математическому образованию и журналу. Случайно или нет, но именно в начале 1960-х гг. обложки журнала перестали быть однотипными и бедными в художественном отношении. С 1963 г. они каждый год стали оформляться по-разному. Сначала это были незамысловатые решения: линии нескольких цветов, разный шрифт. Затем в дизайне обложек стали использоваться математические формулы и конструкции: конические сечения, паркеты, многогранники. Редакция стала шире использовать возможности обложек. На них помещались сведения об учёных-математиках, описания самодельных наглядных пособий, короткие заметки. Такое использование обложек продолжалось вплоть до последних дней существования Советского Союза.

С.И. Шварцбурд

Веяния времени сказались, разумеется, не только на художественном оформлении журнала. Некоторые математики-педагоги пришли к твердому убеждению в необходимости развития дифференцированного обучения; в их числе А.Н. Колмогоров и С.И. Шварцбурд. Последний стоял у истоков углублённого математического образования в СССР. Под видом производственного профиля обучения в хрущёвскую реформу им были организованы специализированные математические классы. А.Н. Колмогоров основал физико-математическую школу-интернат при Московском университете. Аналогичные школы были созданы при других университетах страны.

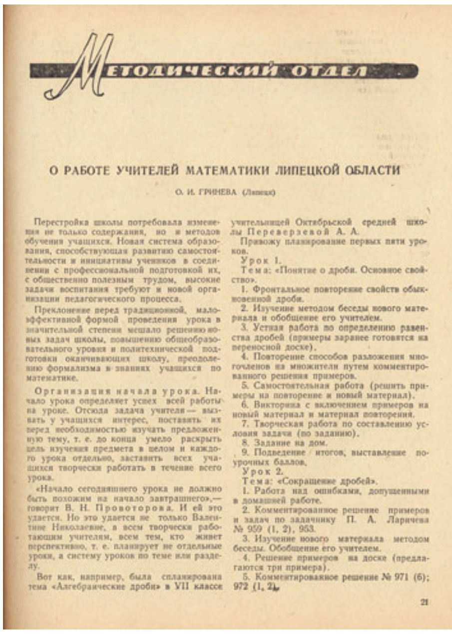
В конце 1950-х – начале 1960-х гг. продолжилось развитие олимпиадного движения и форм внеклассной работы. Появились такие формы, как школы юных математиков, которые открывались при университетах и педагогических вузах и были ориентированы на работу с мотивированными школьниками (см. 1960, № 2). В 1960 г. была проведена первая Всероссийская олимпиада школьников (см. 1961, № 1, 4). В 1964 г. при Московском университете была организована заочная математическая школа.

По инициативе А.Н. Колмогорова в практику массовой школы была введена такая форма, как факультативные занятия. Рекомендации и программы курсов по выбору были опубликованы в 1967 г. (№ 2, 3, 4), в следующем году были подведены первые итоги (1968, № 4). В дальнейшем статьи о проблемах факультативных занятий и методические разработки публиковались каждый год вплоть до 1981 г. Затем эти материалы практически исчезли со страниц журнала.

Важным событием стало появление в начале 1960-х гг. рубрики «Внеклассная работа». Наконец-то материалы научно-популярного характера, критиковавшиеся за малую интересность для массового читателя еще в 1930-е гг., нашли свое место в журнале. Сам же научно-популярный отдел какое-то время присутствовал в каждом номере, но ближе к началу 1970-х гг. зачах. Объяснить это можно двумя причинами: во-первых, немало страниц журнала съедали главы новых учебников и методических пособий для учителя, во-вторых, в 1970 г. был создан журнал «Квант», который успешно справлялся с популяризацией математической науки.

В 1960–1980-е гг. происходили изменения в педагогике, которые коснулись и обучения математике. Интересно, что реформа математического образования к этим изменениям практически никакого отношения не имела. Причины изменений были глубокими и связанными, вероятно, с намечающимся пересмотром всей философии образования. Косвенно об этом свидетельствует отмеченное выше движение за дифференциацию обучения.

Началось всё в начале 1960-х гг., когда широкое распространение получил так называемый «липецкий опыт», впервые за 30 лет нарушивший священную структуру урока. Опыт липецких учителей показал, что урок можно организовать



МЕТОДИЧЕСКИЙ ОТДЕЛ

О РАБОТЕ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ ЛИПЕЦКОЙ ОБЛАСТИ

О. И. ГРИНЕВА (Липецк)

Перестройка школы потребовала изменения не только содержания, но и методов обучения учащихся. Новая система образования, способствующая развитию самостоятельности и инициативы учеников в соединении с профессиональной подготовкой их, с общественно полезным трудом, высокие задачи воспитания требуют и новой организации педагогического процесса.

Преклонение перед традиционной, малоэффективной формой проведения урока в значительной степени мешало решению новых задач школы, повышению общеобразовательного уровня и политехнической подготовки оканчивающих школу, преодолению формализма в знаниях учащихся по математике.

Организация начала урока. Начало урока определяет успех всей работы на уроке. Отсюда задача учителя — вызвать у учащихся интерес, поставить их перед необходимостью изучать предложенную тему, т. е. до конца умело раскрыть цель изучения предмета в целом и каждого урока отдельно, заставить всех учащихся творчески работать в течение всего урока.

«Начало сегодняшнего урока не должно быть похожим на начало завтрашнего»,— говорит В. Н. Провоторова. И ей это удается. Но это удается не только Валентине Николаевне, а всем творчески работающим учителям, всем тем, кто живет перспективно, т. е. планирует не отдельные уроки, а систему уроков по теме или разделу.

Вот как, например, была спланирована тема «Алгебраические дроби» в VII классе учительницей Октябрьской средней школы Переверзевой А. А.

Привожу планирование первых пяти уроков.

Урок 1.

Тема: «Понятие о дроби. Основное свойство».

1. Фронтальное повторение свойств обыкновенной дроби.
2. Изучение методом беседы нового материала и обобщение его учителем.
3. Устная работа по определению равенства дробей (примеры заранее готовятся на переносной доске).
4. Повторение способов разложения многочленов на множители путем комментированного решения примеров.
5. Самостоятельная работа (решить примеры на повторение и новый материал).
6. Викторина с включением примеров на новый материал и материал повторения.
7. Творческая работа по составлению условия задачи (по заданию).
8. Задание на дом.
9. Подведение итогов, выставление поурочных баллов.

Урок 2.

Тема: «Сокращение дробей».

1. Работа над ошибками, допущенными в домашней работе.
2. Комментированное решение примеров и задач по задачнику П. А. Ларичева № 959 (1, 2), 953.
3. Изучение нового материала методом беседы. Обобщение его учителем.
4. Решение примеров на доске (предлагаются три примера).
5. Комментированное решение № 971 (6); 972 (1, 2).

21

эффективнее, если не тратить время на длительный опрос в его начале. В процессе работы над совершенствованием структуры урока педагоги сделали немало находок. Их опыт нашел отражение на страницах журнала «Математика в школе»: в статье О.И. Гриневой (1962, № 4) рассказано о том, как учат математике учителя Липецкой области. «Начало сегодняшнего урока не должно быть похожим на начало завтрашнего», «Лучшего всего для начала урока брать коллективные формы работы», «Проверка задания должна преследовать не только цели контроля, но и носить обучающий характер» – эти положения статьи, очевидные для кого-то сегодня, были новым словом в дидактике того времени после долго застоя. Совершенствование структуры урока в духе липецкого опыта обсуждалось и в последующих номерах журнала (1962, № 5, 6; 1963, № 4). Добавим, что липецкий опыт, показавший хорошие результаты, тут же превратился в самоцель: руководящие органы устроили кампанию по внедрению новых подходов во все школы, что не могло не привести к их дискредитации.

Другим новшеством стало программированное обучение. Это название пришло из области машинного программирования, а сама идея – из капиталистических стран. Она заключалась в следующем. Весь подлежащий изучению материал разбивался на небольшие порции и предлагался учащемуся, например, в виде карточек. Карточка содержала сведения теоретического характера и задание. Усвоив теорию, учащийся тут же решал задание и сверял свой результат с приведённым на карточке ответом. Освоение материала сводилось, таким образом, к последовательной самостоятельной проработке заданий, а деятельность учащегося программировалась последовательностью карточек[6]. Эксперименты по программированному обучению были описаны на страницах журнала (1964, № 2; 1967, № 5). Интерес к программированному обучению возник, очевидно, по причине общего увлечения людей того времени грандиозными перспективами развития вычислительной техники и автоматики. Однако интерес этот довольно быстро угас, и программированное обучение было со временем забыто.

Гораздо дольше сохранялся интерес к другому увлечению тех лет – техническим средствам обучения. Еще задолго до революции педагогами была осознана великая роль наглядности. Математика, как предмет абстрактный, нуждалась в наглядности больше, чем другие школьные предметы. До конца 1950-х гг. наглядность сводилась в основном к использованию в обучении самодельных пособий и таблиц, облегчающих восприятие материала. Развитие кино и микрофильмирования открыло новые возможности. Многие читатели наверняка помнят учебные диафильмы по матема-

[6] Подробнее см.: *Маслова Г.Г.* Программированное обучение. 1963. № 2. С. 35–40; *Болтянский В.Г.* Что такое программированное обучение? 1967. № 5. С. 39–57.


Цена 45 коп.

70557

ЛИНЕЙКА С МАГНИТНЫМ КРЕПЛЕНИЕМ ДЛЯ ДЕМОНСТРАЦИИ КАСАТЕЛЬНОЙ

Линейку с магнитным креплением можно изготовить очень просто. Для этого к обычной линейке или к легкой деревянной планке достаточно прикрепить в середине керамический магнит малого размера.

Этим приспособлением можно пользоваться во всех случаях, когда требуется показать касательную к графику функции. Например, передвижную модель касательной удобно демонстрировать при изучении темы «Критические точки функции, ее максимум и минимум».

Сначала следует начертить на магнитной доске графики двух непрерывных функций, одна из которых имеет максимум на данном интервале, а другая — минимум.

Прикладывая линейку к графику так, чтобы она демонстрировала касательную (магнит удержит линейку на железной доске), и передвигая ее последовательно от точки A к точкам B и D, легко показать, как изменяется угол наклона касательной к оси Ox.

В первом случае (рис. 1) касательная в точке x_1 наклонена к оси Ox под острым углом, в точке x_2 параллельна оси Ox и, наконец, угол наклона касательной в точке x_3 к оси Ox — тупой. Это значит, что угловой коэффициент касательной, а следовательно, и производная данной функции в точке x_1 имела положительное значение, в точке x_2 — нулевое, а в точке x_3 — отрицательное.

Теперь можно рассмотреть, как изменяется угол наклона касательной к оси Ox в случае, когда функция имеет минимум на данном интервале (рис. 2).

Эти иллюстрации помогут учащимся лучше понять теоремы о достаточных условиях существования экстремума функции.

Рис. 1

Рис. 2

Ф. М. Яхаев (с. Байрави ТАССР)

Издательство «Педагогика»

«Математика в школе», 1975, № 3, 1—96

тике. В 1970-е гг. в связи с развитием вычислительной техники возможности стали ещё шире: создавались различные электрифицированные модели (например, тригонометрического круга) и автоматизированные рабочие места, оборудованные тумблерами и лампочками для обратной связи с учителем. Журнал регулярно публиковал описания технических новинок – обычно на обложках журнала (приводились даже электрические схемы приборов). Как и в случае с программированным обучением, эти новшества появились под влиянием научно-технического прогресса, в который тогда многие искренне верили. Участь программированного обучения со временем постигла и технические приспособления – они были забыты.

Как правило, во времена перемен появляются люди, выражающие крайние точки зрения, концентрирующие в своих убеждениях и деятельности ещё не до конца оформившиеся устремления масс. Педагогика (в том числе, педагогика математики) не исключение. На фоне общего движения за повышение эффективности обучения появились такие ныне известные личности, как П.М. Эрдниев и В.Ф. Шаталов. Первый опубликовал две статьи (1963, № 4; 1970, № 4), о работе второго на страницах журнала рассказал А.Д. Семушин (1973, № 1). В.Ф. Шаталов, как и другие педагоги-новаторы, стал очень популярен в 1980-е гг. Его материалы публиковались на страницах «Учительской газеты», его показывали по телевидению. Деятельность В.Ф. Шаталова получила неоднозначную оценку читателей журнала «Математика в школе». Педагог М.П. Буловацкий восторженно отзывался о его методике работы (1988, № 1). Читатели критиковали систему В.Ф. Шаталова и указывали на многочисленные математические ошибки, содержащиеся в его разработках (1988, № 1, 4; 1989, № 4). Выходя за хронологические рамки нашего очерка, отметим, что популярность системы В.Ф. Шаталова сошла на нет в 1990-е гг.

В заключение обратим внимание на ряд критических материалов, помещённых редакцией в 1987–1988 гг. в связи с процессами демократизации. Эти материалы хорошо отражают и состояние общества, и состояние журнала в перестроечный период. Для начала отметим, что резко изменилось содержание передовиц. Передовицы стали меняться еще в конце 1950-х гг.: мрачные погромные фразы конца 1930-х гг. уступили место бодрым призывам к дальнейшему развитию. В 1970-х – начале 1980-х гг. передовицы, как и время, стали застойными. Нередко их писал Б.В. Гнеденко, повторяя из года в год одни и те же слова о роли В.И. Ленина и комсомола в развитии советской науки, о научно-техническом прогрессе и т.д. В перестройку передовицы стали демократичнее, и впервые номер журнала открылся проблемными заметками обычных учителей (1987, № 2). Затем первые полосы стали отводиться критическим материалам регулярно. Судя по их количеству, в редакцию хлынул поток писем, в которых люди рассказывали о наболевшем и предлагали пути решения проблем.

Подверглась критике и работа самого журнала. П.М. и Б.П. Эрдниевы писали: «Журнал “Математика в школе” превратился, можно сказать, в сборник инструкций и в набор всевозможных задач: экзаменационных, конкурсных, олимпиадных и т.п. Он перестал заниматься самым главным делом для сегодняшней методики преподавания математики – научным анализом учебников и программ, которые стали так часто меняться»[7]. На встрече с учителями в 1988 г. отмечалось: «Более систематично нужно публиковать результаты научно-методических исследований по актуальным проблемам методики обучения математике, освещать их конкретные реализации в школе»[8]. Педагоги указывали на недемократичность редакции журнала, которая, по их мнению, избегала помещения различных точек зрения на проблемы. В 1960-е гг. дискуссий было больше, и журнал был интереснее, – отмечали они. Предлагалось отказаться от публикации вариантов вступительных экзаменов и олимпиадных задач, окончательно передав эти материалы в ведение журнала «Квант».

Трудно сказать, насколько реально было учесть пожелания читателей. Постоянные реформы и перекраивания программ, появление в 1980-е гг. новых учебников не позволяли сосредоточиться на организации методических дискуссий, характерных для периода стабильности. Методика обучения математике начала превращаться в набор инструкций по работе с тем или иным учебником. Теперь мы знаем, что это было неслучайно, и журнал повлиять на ситуацию, скорее всего, не мог.

***

1980-е годы... Как быстро идет время: безвозвратно исчезли грозные тридцатые годы, ушли трудные сороковые и пятидесятые; отшумели оттепельные шестидесятые, пролетели реформенные семидесятые... И вот наступили они, восьмидесятые, полные надежд и сомнений. Хотелось верить в перемены и казалось: к началу нового тысячелетия всё обязательно будет хорошо. А из-за поворота тем временем уже выглядывали лихие девяностые. Какими-то там будут школьная математика и журнал в надвигающемся XXI веке?..

Вернуться к содержанию

[7] Советы журналу. 1987. № 1. С. 24.
[8] *Рогановский Н.М.* Наши предложения. 1988. № 4. С. 37.

Живая история

Об А.Р. Майзелисе[1]

Александр Поэлевич КАРП
Teachers College, Columbia University
apk16@columbia.edu

Имя Арона Рувимовича Майзелиса я впервые услышал в сентябре 1976 года. Нас, только что набранных первокурсников математического факультета Герценовского института зачем-то повезли за город, и в поезде обсуждались недавние школьные впечатления. Вот тут-то один из моих однокурсников и упомянул своего учителя Арона. Истории, которые он рассказывал с явным восхищением, впрочем, показались мне несколько странными – повествовалось в основном о том, как учитель кого-то ударил указкой, а кого-то дёрнул за косу. Восторг по явно не заслуживающему его поводу запомнился, но ни желания, ни возможности как-то глубже вдумываться в открывшееся у меня тогда не возникло.

Звучало имя Майзелиса и еще несколько раз на протяжении моего обучения в педагогическом институте. Помню, как говорил о нём, по сути дела противопоставляя его другим известным учителям, Михаил Моисеевич Лесохин, сам блестящий преподаватель, оказавший огромное влияние на многих и многих студентов. «Арон сам всё время учится», – повторял он и рассказывал, как тот пригласил его прочесть у себя в школе небольшой курс, посвящённый теории множеств и алгебре. Сам Майзелис при этом сидел в классе, во всё вникая, а на каком-то этапе попросил разрешения следующую лекцию прочитать самому, и сделал это великолепно. Из рассказа Михаила Моисеевича нетрудно было умозаключить, что такое поведение для учителей, к сожалению, нетипично и что даже вполне уважаемые учителя предпочитают, как говорят в школе, рассказывать, что знают, не особенно беспокоясь о расширении последнего.

[1] Текст с небольшими изменениями перепечатан из книги: Памяти А.Р. Майзелиса. СПб.: СМИО-Пресс, 2007. Фотографии А.Р. Майзелиса взяты с сайта: fotki.yandex.ru/users/club30ka/

Слушая эти и другие разговоры, в которых мелькало имя Майзелиса, я однако не предполагал, ни что мне суждено проработать рядом с ним восемнадцать лет, ни то, как важно будет для меня общение с ним и в течение этих лет и позднее. Но в конце августа восьмидесятого года после окончания института мне удалось устроиться работать учителем вычислительной математики в школу № 30, и уже на следующий день после того, как мои документы были принесены в школу, я сидел на заседании методического объединения учителей математики, которое вёл его председатель Арон Рувимович.

Предмет «Вычислительная математика», который я был взят вести, был, наряду с программированием и физической лабораторией, заменителем трудового обучения. Считалось, что учащиеся на этих уроках приобретают трудовые навыки, так сказать, в русле выбранной специальности. Я при этом вёл не всю вычислительную математику, а лишь практические занятия – раз в две недели половина класса приходила ко мне в кабинет делать на калькуляторах лабораторные работы, другая же половина класса в это время должна была изучать с основным учителем математики теоретические основы применяемых в дальнейшем методов. На следующей же неделе группы менялись.

Преподавать вычислительную математику мне тогда довольно быстро стало скучно, хотя бы потому, что повторять почти одно и то же приходилось четырнадцать раз (классов в параллели было тогда семь). По прошествии лет я стал думать, что этот опыт был на самом деле полезен. Не говоря о прочем, я понял тогда, как неверны ходячие суждения о том, что от учителя ничего не зависит – один за другим приходили ко мне разные классы, и ребята совсем разного ожидали от меня, по-разному вели себя, по-разному думали, по-разному реагировали на сказанное. Я узнавал в манере класса манеру учителей и дивился тому, как много может сделать учитель.

Важно было и то, что «нежёсткая», мною же разработанная программа, позволяла довольно легко переставлять, а иногда и отменять уроки, что давало мне возможность посещать уроки более опытных коллег. Арону Рувимовичу тоже явно было не в радость повторять одно и то же дважды, и когда я предложил, что одну неделю он будет вести урок у всего класса, а я буду сидеть сзади, знакомясь с его педагогическими приемами, а другую неделю он будет сидеть у меня на уроке и делать мне потом методические замечания, он легко согласился, отправив меня, впрочем, получать разрешение у администрации (которое было опять-таки легко дано).

По такой же схеме стали мы с ним вести и кружок Юношеской математической школы, занятия которого проходили дважды в неделю – один раз он, один раз я, причем непреподающий сидит в классе и обсуждает потом с преподающим проведённое занятие. Обсуждали мы занятия обычно по дороге домой, куда шли вместе, причём так, что дорога как-то растягивалась, и уже даже придя к «Приморской», мы ещё долго стояли, разговаривая. Говорили при этом уже, конечно, не только о занятиях кружка, но и обо всём другом – от текущих школьных новостей до каких-то задач или истории тех или иных изменений школьного курса.

Я и сегодня считаю, что лучшего способа обучения молодого учителя, чем тот, который таким образом прошел я, нет. Я, к сожалению, не помню уже какие-то детали увиденных уроков, но невозможно забыть общий их ход. Вот Арон Рувимович формулирует какую-то задачу на занятии ЮМШ (Какую? Увы, не могу вспомнить). Тут же поднимается лес рук, а кто-то прямо с места начинает задавать вопрос. «Шш-ш, – машет рукой Арон Рувимович, – напишите свои вопросы на листочке, а я тем временем напишу свой ответ». Листочки раздаются, ребята пишут свои вопросы и сдают их, а Арон тоже что-то пишет на листочке. Потом вопросы читаются – один, второй, третий. «Ну, а теперь мой ответ». Заготовленный листочек вытаскивается и громко зачитывается ответ, написанный до того, как были поставлены вопросы: «Не имеет значения!» Оказывается все те параметры, о которых спрашивали, не важны! Никакие дополнительные данные не нужны – задача может быть решена (причём единственным образом!) именно в данной формулировке! Как? А вот в этом-то и вопрос – думайте. Боже мой, что делалось с детьми в продолжение этой сцены! Да что там с детьми – я тоже смотрел на всё это, буквально раскрыв рот.

Арон запросто мог и проговорить целый час, не прибегая, казалось бы, ни к каким педагогическим приемам. Но лекция его захватывала, и хотя говорил вроде только он, но слушатель участвовал в ней, думая вместе с лектором. Майзелис строил свои уроки как художественное произведение, как сложную конструкцию, в которой форма неотделима от содержания, а эмоциональные переживания от понимания сути. Любой ребенок (да и взрослый) знаком с захватывающей магией нарастания свойства, когда, как в андерсеновском «Огниве», сначала повествуется о собаке с глазами как чайные чашки, а потом о собаке с глазами как мельничные жернова. Арон умел так же строить ряды задач. Некоторые из них я слышал даже не на уроке, а в камерном исполнении – в ходе разговора со мной, и то поражался открывающемуся эмоциональному напряжению. Вот задача про угол – и так её можно сделать, и эдак, и ещё вот так. Ну, а теперь поставим эту же задачу, но не про угол, а про дугу окружности – и что же? Выясняется, что ни один из методов не подходит, нужно что-то другое. Решение появляется, и оказывается, что оно не вовсе не похоже на данные для угла, нужно только понять, что мы раньше слишком узко понимали то, что делали. Но задача идет ещё дальше: рассматриваются всё новые объекты, и всё глубже понимаем мы и сделанное в самом начале, и то, что может быть сделано...

Не то, чтобы такой подбор задач был свойственен только Арону. Так или иначе подбирать усложняющиеся наборы задач должен любой учитель. Но навряд ли мне ещё когда-либо было так интересно обсуждать такие наборы, как когда их давал мне Майзелис. У него как-то особенно ясно было и то, что осталось неизменным, и то, что изменено, и, главное, драматизм невозможности применения старого приема и жгучая потребность нахождения нового.

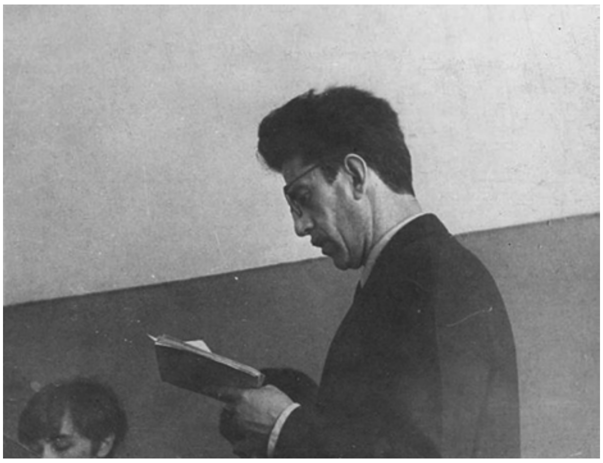
Я всегда завидовал тому, как конкретно и зримо выглядят у Арона и задачи, и вводимые понятия. У меня как-то всегда выходило более абстрактно, а у него всё буквально можно было пощупать руками. Он, кстати, очень любил, когда ребята делали геометрические модели, а кабинет его всегда был полон плакатами с какими-то мудрыми изречениями – Арону гораздо больше нравилось их показывать, чем просто повторять. Но этим дело не ограничивалось. У него действительно математика была *реальной*. На Западе любят говорить о realistic mathematics и real world problems, при этом, к сожалению, очень часто всё сводится к тому, что довольно бессмысленно и искусственно в задачу вплетаются какие-то псевдожизненные истории про то, скажем, как Лакиша и Рикардо ходили в магазин. Не то было у Арона. Он свободно формулировал и жизненные, и физические задачи – хорошая естественно-научная подготовка ему это позволяла. Но, быть может, из-за опыта работы в физической школе – не знаю – он и чисто математические задачи преподносил как-то особенно. Они возникали естественно и уж никак не казались досужей и отвлеченной игрой чужого ума.

Рассказывая знакомым про уроки Майзелиса, я ловил себя на том, что как-то упускаю самое главное. Ну, в самом деле, что такого в следующем эпизоде: надо стереть с доски, а тряпка совсем сухая. Арон посылает дежурного намочить тряпку. Тот возвращается с очень мокрой, совсем неотжатой тряпкой. Арон берет её с гримасой и делает вид будто хочет отжать её за шиворот рослому дежурному: «Нагнись, пожалуйста». Весьма вроде немудреная шутка советского учителя, при желании можно в ней даже усмотреть издевательство над учащимся. А и сам учащийся, и весь класс, и я хохочем. Почему?! То ли от того, как смешно всё это показывает Арон, то ли от неожиданности и, что называется, эффекта обманутого ожидания того, что должен делать в такой ситуации учитель, то ли от того, что уже всё, что делает Арон кажется нам восхитительным, то ли от того, что ритм урока требует какой-то разрядки, и шутка пришлась кстати. В любом случае ясно, что каждый эпизод становится понятным только в рамках всей системы и теряет свой смысл, будучи из неё вырванным.

Арон творил свою систему из сочетания запланированного и неожиданного – импровизационного. Драматургия его уроков предполагала, что ученики не только зрители, но и участники, свободно выходящие на сцену. Это диковинное ощущение участия в пьесе, причём и в качестве актера, и в качестве автора, захватывало и пленяло.

Мы как-то обсуждали схему, по которой нам в Герценовском институте положено было, проходя практику, писать планы уроков – одна колонка «что говорит учитель», вторая – «что пишется на доске», третья – «что говорит ученик», и наконец четвертая – «что пишется в тетради». «А ученик говорит, что хочет», – сказал тогда Арон. И хотя он сам, конечно, прекрасно знал, что ошибки повторяются, что ученики всё-таки очень часто говорят одно и то же, и что в любом случае продумать, что они могут сказать, небесполезно, в этом возгласе выразилась готовность к неожиданному, готовность тут же на уроке менять задуманное, создавая новое.

Писатель может переписать неудачный кусок, режиссёр может переснять снятое или просто вырезать часть пленки. Учитель заново провести тот же самый урок не может. Иногда у Арона возникали длинноты, иногда урок сбивался с ритма – это, однако, оказывалось неважным, получающиеся уроки искупали всё.



Обсуждая со мной мои уроки, Арон больше всего говорил о математическом – задачах, решавшихся на уроке, и тех, которые можно было бы ещё дать, – и, так сказать, артистическом: «Зачем же Вы говорили с такой интонацией? Вот как надо было сказать». И Арон показывал. Как надо бы построить занятие, он говорил реже и менее охотно. Вообще Арон был больше учитель, а не методист в том смысле, что больше думал, как провести урок именно ему самому, а не вообще учителю, и не очень любил теоретические рассуждения об уроках. То, что ему хотелось сделать на уроках, он, однако, представлял вполне ясно, включая те стороны, которые обычно не считают математическими. Рассказазывая мне о собственных годах учения, он несколько раз возвращался к своей преподавательнице французского: «Мне, никогда не бывшему во Франции, после её занятий несколько раз снился Париж». Уроки Арона тоже, вероятно, многим снятся.

Много есть историй про блестящих лекторов и ораторов, которые будто бы помечали в плане своих выступлений «Здесь вставить шутку», «Здесь подбавить страсти». Это не про Арона Рувимовича. Тот смеялся потому, что ему самому было смешно, и когда в голосе у него была страсть – это была подлинная страсть. Ему самому было очень интересно и заниматься математикой, и учить детей. Уже в глубокой старости, незадолго до инсульта, заставившего его перестать преподавать, он мне говорил, что у него есть мечта завести кружок. Казалось бы, уж сколько кружков было проведено, а все хотелось еще.

Однажды он мне рассказал, как в какой-то момент ещё в начале своей учительской деятельности он подумывал бросить преподавание и пойти работать инженером (что послужило для этого поводом, он не говорил). Но сначала он отправился советоваться к Григорию Михайловичу Фихтенгольцу. И тот ему сказал, что работать инженером ему будет интересно два-три года, а потом всё будет освоено и станет скучно, в школе же всё время будет новое. «И так, – заключал Арон, – и оказалось».

Рассказывая мне про задачи, Арон всегда говорил и о том, как и кто их решал – для него это было неразделимо: «Впервые мне её решил в 59-м такой-то, а потом аж до 76-го никто не мог сделать и только такой-то её сделал, но совсем по-другому», – что-нибудь такое было типичным.

На праздновании своего шестидесятилетия Арон Рувимович сказал фразу, смысл которой сводился к тому, что острота чувства к ученикам после окончания несколько ослабевает, и иначе было бы невозможно. Многие его выпускники, знающие как Арон помнил всё про всех и как радовался успехам своих бывших учеников, с этим, быть может, не согласятся, но лишь потому, мне кажется, что трудно даже представить, как Арону были интересны его ученики в момент их обучения.

Уже в конце восьмидесятых, если не в начале девяностых, ему как-то дали путёвку в санаторий в середине учебного года. Не поехать он не мог, поскольку чувствовал себя неважно, потому были найдены какие-то заместители на время его отсутствия, и им были оставлены подробнейшие инструкции. Через неделю после отъезда он позвонил мне и попросил переписать отметки за зачет или контрольную, которая должна была быть проведена: «Я Вам послезавтра, если можно, перезвоню, и Вы мне их продиктуете». И действительно Арон перезвонил (для чего, сколько я понимаю, тоже надо было предпринять немалые усилия, ибо сама по себе междугородняя связь отнюдь не была простым делом), и я ему всё продиктовал. Очень уж было интересно, как там написали, как выучили пройденное, и дождаться возвращения было никак невозможно.

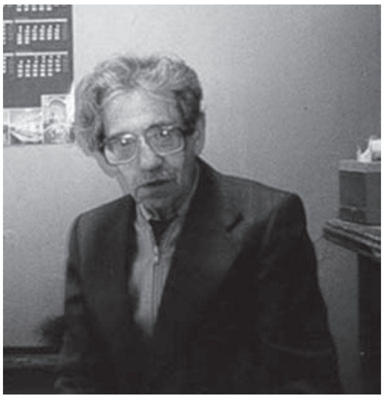
Предполагаю, что я был не единственным, к кому Арон тогда обращался с подобными просьбами – он сам обмолвился, что заранее заготовил много списков классов, чтобы ему по телефону было сподручней записывать. Просить же одного человека слишком о многом даже при самых близких отношениях Арон не хотел.

У нас, увы, обычно не очень часто задумываются над тем, как будет людьми (особенно младшими в чине) восприниматься сказанное или сделанное. Хамство нередко почитается чуть не добродетелью и именуется открытостью и простотой. Арон в этом смысле простым уж никак не был. Показательно, что он ни разу не сказал мне «Саша», только «Александр Поэлевич» при том, что когда мы познакомились, мне было двадцать один, а ему пятьдесят девять. Он не только был очень чуток и предупредителен в отношениях с людьми (при том, что обольщаться на их счёт ему было несвойственно), но и склонен был, что называется, теоретически размышлять о том, как себя вести с людьми.

Как-то кто-то при нас рассуждал о том, как неприветливы люди в Прибалтике. Оставшись вдвоём, мы с большой страстью продолжили обсуждать возникшую тогда перепалку. «Я, – говорил Арон, – выучил по-литовски фразу, которой там старички друг друга приветствуют [если я правильно помню, она значила «Бог в помощь»]. Я подхожу, её говорю. Как мне все улыбаются! Что же, трудно было так себя вести?»

Не следует однако представлять себе Арона в виде святочного старичка, только и знавшего, что всех лобызать. Один наш видный педагогический публицист в свое время упрекал авторов учебника по педагогике за то, что в этом учебнике ни разу не говорилось про любовь к детям. Я от Арона про любовь тоже не слышал, а при каких-то нередких в восьмидесятые-девяностые поэтичных рассуждениях о сердцах, отданных детям, он склонен был усмехаться или морщиться. Арон напротив любил говорить о том, что не надо жалеть детей и «разгружать» курс и никогда не затруднялся поставить «двойку» или «единицу».

«Я по сию пору горжусь тем, что я был одним из трёх человек в нашем классе, закончивших седьмой класс с "четвёркой" по геометрии!», – много раз говорил он мне. «Пятёрок», разумеется, не было вовсе, но «четвёрки» были настоящие. Вот и Арон Рувимович хотел, чтобы было по-настоящему. В этом он был классический демократический просветитель, хотящий, чтобы всем открылись подлинная наука и подлинная культура, но прекрасно сознающий, что это требует гигантского душевного труда и от обучающего и от обучающегося. Теперь даже в учёных педагогических трудах можно вычитать, что демократично, напротив, не считать, что знание лучше незнания, потому как каждый постигает мир по-своему. Арон Рувимович так, безусловно, не думал.



Он был реалистом, и процесс перехода от «как бы обучения» к обучению настоящему представлялся ему достаточно болезненным. «Сколько человек Вы выгнали на первой контрольной за списывание?», – спросил он меня как-то, и когда я ответил, что ни одного, но что зато я не скупился на замечания и укоризны, недовольно покрутил головой. «Математика без слёз» – это не про Ароново преподавание (никогда, кстати, не мог понять разрешают ли поклонники этой формулы расстраиваться в ходе какого-либо занятия или правильно вообще ничего не брать близко к сердцу). Другое дело, что переживания ученика становились в большой мере переживаниями и Майзелиса.

Как-то зайдя за ним в его кабинет, я увидел, что он разговаривает с какой-то девочкой, так что мне пришлось уйти и его ждать. Через некоторое время он зашёл ко мне и объяснил, что у девочки сплошные «двойки», и она как-то уж очень расстроена, так что он хотел ее утешить, а главное, дождаться другой девочки из этого класса, которая должна была зайти так, чтобы бедная «двоечница» не шла домой одна.

Многочасовое общение с детьми после уроков, сидение с ними Арон считал важной частью своего дела. «Видите, он к нам пришёл, и книжку взял, и ещё раз придет. А нам это и нужно», – сказал он мне как-то про одного ученика, сколько я помню даже не из его класса. То, что нам это нужно, считали не все. Один наш коллега специально в печатном виде разъяснял, что внимание к детям и сидение с ними после уроков – это не одно и то же. Сам он уходил из школы ровно через десять минут после конца последнего урока. Арон не спорил, но делал по-своему.

Казалось бы нехитрая мысль, что надо записать воспоминания старых учителей, почему-то пришла мне в голову только тогда, когда Арон говорил уже с трудом, и среди сделанных мной магнитофонных записей беседы с Майзелисом нет. Было бы важно попытаться восстановить его рассказы – он ведь учился и в Ленинградском и в Московском университете у многих выдающихся математиков, участвовал и в создании первых специализированных школ, и в проведении олимпиад, и в бесчисленном количестве методических реформ и экспериментов.

Говорил он всегда, очень точно и трезво воспроизводя то, что происходило, отнюдь никого не идеализируя, и понимая принципиальную ограниченность успеха любых реформ в образовании, но вместе с тем ни в коей мере не отказываясь от борьбы за то, чтобы в школе стало лучше. Памятны мне, например, его рассказы про Институт усовершенствования учителей, где Арон в своё время проработал десятилетия, и где я чуть меньше, чем через десять лет после его ухода, начал работать. Майзелис и предупреждал меня о том, что не надо взрываться, увидев, что часть аудитории вяжет или ест, и говорил о читанных им весьма нетривиальных курсах.

Для человека, интересующегося историей математического образования, его рассказы были ценнейшим источником сведений, но говорят они и о нём, и в целом об эпохе, в которой он жил. Однажды он рассказал мне, что на младших курсах был уверен, что Лобачевский – это выдуманная советской пропагандой фигура вроде Крякутного, мифического изобретателя воздушного шара. В самом деле, всё было вполне типично: на Западе, мол, все опростоволосились, а наш русский орёл всем нос утёр. Орёл тоже выходил вполне утверждённого образца – царский чиновник, над которым смеялись и математики-профессионалы, и демократически настроенные современники. «И только на лекциях А.Д. Александрова, – говорил Арон, – я понял, что Лобачевский на самом деле гений».

Выработанная привычка думать, определяя, как на самом деле, а не просто опознавать те или иные ярлыки, его никогда не оставляла. Арон прожил жизнь советского учителя и при всей своей разговорчивости всегда думал и знал гораздо больше, чем говорил. Многие годы мы никогда впрямую не говорили о политике. Это, впрочем, было и не нужно. Пожалуй, лишь один раз тогда мы подошли к этой тематике.

Школьный секретарь парторганизации обнаружил, что я не стою на комсомольском учёте в школе, а потому начал меня суровым голосом отчитывать в кабинете завуча, разъясняя, что добром это для меня не кончится. Я вынужден был вежливо ответить, что не имел возможности стать на учёт, поскольку никогда в комсомольской организации не состоял. На чём беседа и закончилась, хотя присутствовавших бессоюзность, как это называлось, молодого учителя явно не обрадовала.

Я не удержался и рассказал про этот эпизод Арону. При всей любви к Арону я всё же тогда не рисковал говорить о причинах своего невступления в комсомол и ограничился тем, что с улыбкой сказал, что я – человек болезненный, и всегда считал, что таким не место в боевом молодежном авангарде нашей партии. Когда я это рассказывал, мы как раз подошли к станции метро (почему-то «Василеостровской», а не «Приморской» в тот день). «Ага, – сказал Арон, – понятно. Я тоже не был комсомольцем. И тоже по болезни. Ну, всего доброго. До завтра». И мы расстались, оба очень довольные.

В какой-то момент нашей истории оказалось, что людей, бывших при советской власти диссидентами, у нас множество, почти столько же, сколько глубоко религиозных (сейчас, впрочем, быть диссидентом опять стало немодно). Нужно потому твёрдо сказать, что никаким активным борцом с режимом Арон не был и героически умирать совершенно не хотел. Его дело было другое. Он только очень не хотел мараться. И, соответственно, не марался. И взрослые, и дети это чувствовали.

После 2000 года мы стали общаться гораздо меньше, чем раньше. Я стал работать в Нью-Йорке, приезжая в Петербург лишь летом или на очень короткий срок. Иногда я ему звонил, но говорить по телефону ему было трудно. Но, когда я заходил к нему, я видел человека, измученного болезнью, но по-прежнему думающего и чувствующего. Задыхаясь и прерываясь, с мучительными паузами он рассказывал мне про своих бывших учеников, а, слушая про мою работу, спрашивал не из вежливости, а потому что ему действительно было интересно. Для одной моей статьи, кстати, оказались очень важны его советы.

Пушкин когда-то восхищался своим дядей, который, умирая, сказал: «Как скучен Катенин», оставаясь литератором до последней минуты. Когда в конце марта 2005 года я видел Арона последний раз, у него на кровати лежала книжка, он мне сказал, указывая на неё: «Очень растянуто», и я услышал прежнего Майзелиса.

Я позвонил ему как-то и сказал: «Держитесь», и услышал в ответ: «Я стараюсь». Он всегда старался и всегда держался. Один мой товарищ в своё время, уходя на новое место работы, в чём ему очень помог Арон, говорил мне: «Какой всё-таки хороший человек Майзелис. Даже удивительно». Вот и я всё продолжаю удивляться.

Вернуться к содержанию

Первый профессор (о Ф.Ф. Нагибине)[1]

Геннадий Анатольевич КЛЕКОВКИН
зав. кафедрой высшей математики и информатики Самарского филиала Московского городоского педагогического университета
klekovkin_ga@mail.ru

За годы своей трудовой деятельности мне пришлось работать и повышать квалификацию в нескольких вузах, принимать участие в различных совещаниях, научных конференциях и семинарах, много и продуктивно общаться с коллегами почти половины педагогических вузов России. В разное время и в разных вузах удалось прослушать большое число интересных и не очень интересных учебных курсов и отдельных лекций, как начинающих преподавателей, так и крупных, маститых учёных. Почти каждый «старый» вуз, факультет, кафедра имеют свои устоявшиеся традиции, специфические особенности и научно-методические достижения; особой гордостью являются известные выпускники, некогда работавшие и работающие учёные и педагоги.

Для меня воспоминания о Ф.Ф. Нагибине связаны, прежде всего, с «фирменными» особенностями математического факультета Кировского государственного педагогического института, который я окончил в 1970 году. В то время на факультете не было докторов наук, костяк преподавательского коллектива составляли доценты и старшие преподаватели, с полной самоотдачей посвятившие себя преподавательской деятельности; единственный профессор, автор нескольких учебных пособий для школьников – Фёдор Фёдорович Нагибин – был для своих коллег и для нас студентов поистине звездой первой звёздной величины.

В чём состоял этот фирменный стиль преподавания на математическом факультете? Он в самом высоком смысле соответствовал профилю педагогического вуза. Почти все преподаватели ежедневно на лекциях, семинарах и практических занятиях демонстрировали достойные подражания образцы тщательной методической подготовки к своим занятиям. Нас много и часто вызывали к доске, учили «говорить», регулярно проводились коллоквиумы, проверялось выполнение домашних заданий и т.п. Ответы почти на всех курсовых экзаменах проходили у доски. Подготовившись к ответу, студент должен был выделить его основные положения и продумать, как их оформить на доске. При ответе обычно не разрешалось пользоваться своими записями на бумаге. А с какой скрупулезностью вычитывались и выверялись наши конспекты уроков во время первой педагогической практики и как дотошно анализировались проведённые уроки! Мы, конечно, тогда до конца не осознавали, что всё это закладывает деятельностные основы будущей профессиональной квалификации. Понимание пришло потом, в школе у классной доски.

Профессор Ф.Ф. Нагибин читал на выпускном курсе лекции по дисциплине, которая называлась «Дополнительные главы математического анализа». В программу курса входили основы теории множеств, элементы функционального анализа и теории функций комплексного переменного. На общем высоком методическом уровне

[1] Текст с небольшими изменениями перепечатан из книги: Проблемы современного математического образования в вузах и школах России. Материалы IV Всероссийской научно-методической конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Ф.Ф. Нагибина. Киров, 2009.

преподавания специальных дисциплин его лекции отличались какой-то органичной целостностью и подкупали неповторимым педагогическим мастерством. В них было всё: мотивировки введения новых понятий, выделение основных идей и ключевых положений, лаконичные и в то же время логически безупречные доказательства, многочисленные примеры. Эти примеры были заготовлены на библиографических карточках, которые находились во внутреннем кармане пиджака. Нам нравилось, как Ф.Ф. Нагибин доставал стопку карточек из кармана, снимал очки, щурился, и всякий раз приводил яркий пример. Затем верхняя карточка перекладывалась вниз стопки, последняя возвращалась обратно в карман. Особый колорит его лекциям придавала и своеобразная неповторимая дикция. Ещё одной отличительной чертой лекций Ф.Ф. Нагибина было хорошо структурированное оформление чётким каллиграфическим подчерком всех записей на доске. Создавалось впечатление, что лектор при подготовке продумывает не только содержание лекции и методику его изложения, но и такие моменты, как оформление своих записей.

Для активизации внимания Ф.Ф. Нагибин часто предлагал приводимые им примеры для решения слушателям. Естественно, что многим из нас хотелось непременно первым справиться с предложенной задачей. Особенно запомнилось задание установить взаимно однозначное соответствие между интервалом и отрезком, с которым в аудитории никто не справился, и которое было дано на дом. Такое отображение, как хорошо известно, можно установить с помощью двух функций. Нашей общей ошибкой было то, что все искали гладкое отображение. Помню, как до следующей лекции безуспешно пытался найти нужное соответствие сначала с помощью инверсии, а затем с помощью проективного преобразования плоскости, «пристраивая» концы отрезка на несобственную прямую. При этом интуитивно осознавал, что надо что-то «загнать» в бесконечность, и что расширенная плоскость для этого не годится. В общем, задачу я не решил; слабым утешением было лишь то, что с ней на курсе тоже никто не справился.

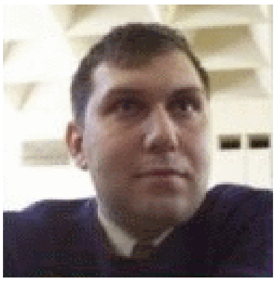
Через несколько лет, когда я уже работал на математическом факультете, мне удалось приобрести несколько книг из библиотеки Ф.Ф. Нагибина, которая распродавалась после его смерти. Знакомая роспись на каждой книге и многочисленные пометки на полях мелким каллиграфическим почерком... Читая их, я представлял, как он работал с этими книгами, когда писал свои статьи, готовился к лекциям... Позже в моей библиотеке появились книги с автографами многих известных профессоров, некоторые из них, к сожалению, были также куплены на распродажах, а некоторые подарены самими авторами. К этим книгам относился и отношусь с большим трепетом. Но к книгам Фёдора Фёдоровича особое отношение, он был первым профессором, лекции которого мне довелось слушать.

Те образцы глубоко методического подхода к своей работе, которые дали преподаватели математического факультета Кировского пединститута и, первую очередь Фёдор Фёдорович Нагибин, со временем удивительным образом проявились в судьбах выпускников факультета. Многие из них, став кандидатами физико-математических наук, в последующем превратились в преданных поклонников методики обучения математике. Назову лишь фамилии недавно ушедшего от нас Я.П. Понарина, известного своими учебными пособиями по элементарной геометрии, и автора УМК по геометрии для 10–11-х классов Е.В. Потоскуева. Этот список можно продолжать достаточно долго.

Вернуться к содержанию

Вокруг математики

Задачи «Освещение города» и «Свет в лабиринте» на конкурсе КИО[1]



Илья Александрович ПОСОВ
ассистент кафедры «Высшая математика-2»
Санкт-Петербургского государственного
электро-технического университета
iposov@mail.ru

О конкурсе «Конструируй, Исследуй, Оптимизируй»

Дистанционный конкурс-игра «КИО» (Конструируй, Исследуй, Оптимизируй) проводится каждый год в последних числах февраля – первых числах марта. Учредители конкурса – журналы «Компьютерные инструменты в образовании», «Компьютерные инструменты в школе» и Институт продуктивного обучения Российской Академии Образования.

Участникам конкурса КИО предлагаются задачи, для решения которых нужно проявить изобретательность и смекалку. Каждый год выдаются три задачи, и к каждой задаче для работы с ней прилагается специальное программное обеспечение. Все задачи допускают много разных решений, а участники сравниваются по тому, насколько их решение оптимальнее решений других участников.

Участникам конкурса предлагаются задания двух уровней: I уровень доступен учащимся младших и средних классов (до 7 класса включительно), задания II уровня предназначены учащимся 8–11-х классов, студентам колледжей, техникумов и младших курсов университетов. Конкурс проводится удалённо, т.е. в нём можно участвовать, не выходя из дома. На сайте конкурса (http://ipo.spb.ru/kio) зарегистрированным пользователям доступны все задачи предыдущих лет начиная с 2004 года.

В статье речь пойдёт о задачах «Освещение города» и «Свет в лабиринте», которые были предложены на конкурсе КИО в 2009 году.

---

[1] Текст с небольшими изменениями перепечатан из журнала «Компьютерные инструменты в школе» (№ 3, 2009).

Условие задачи

В задаче требовалось расставить в городе (для участников первого уровня) или в лабиринте (для участников второго уровня) несколько светильников так, чтобы они освещали всю площадь города или лабиринта, и при этом их было как можно меньше. На рисунках 1 и 2 изображены карты города и лабиринта. Тёмная область соответствует домам и стенам, светлая — свободному пространству. На рисунках приведены примеры расстановки светильников; на рис. 1 также можно увидеть пример области, которую освещает один из светильников.

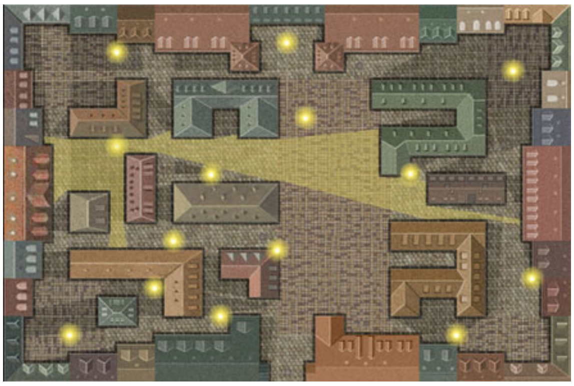


Рис. 1. Город

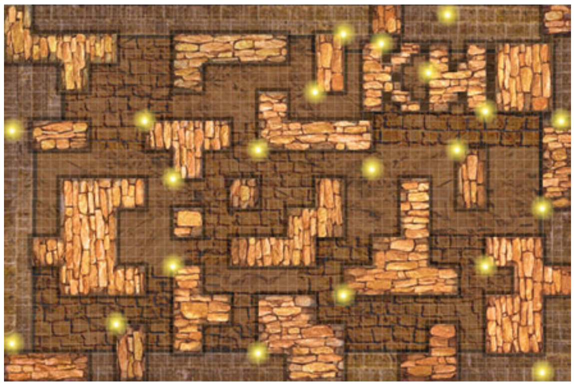


Рис. 2. Лабиринт

Задача известна под названием «Задача о Картинной Галерее», её оригинальная постановка звучит следующим образом: «Картинная галерея имеет форму многоугольника. Необходимо расставить в ней минимальное число точек-охранников так, чтобы они вместе наблюдали всю площадь многоугольника».

Говорят, что набор точек S наблюдает многоугольник, если для каждой точки q многоугольника существует точка s из S такая, что отрезок sq полностью лежит в многоугольнике. Задачу можно обобщить и считать, что наблюдать надо не многоугольник, а многоугольник с несколькими дырами многоугольной формы. Именно эта ситуация имеется в виду в задаче: например, дома в городе — это вырезанные из многоугольника многоугольные дыры.

Задача о картинной галерее является вычислительно сложной, определить минимальное количество охранников для заданной галереи совсем не просто. Точнее, задача является *NP*-полной. (Чтобы говорить об *NP* полноте, задачу надо сформулировать так, чтобы ответ к ней был «да» или «нет». *NP*-полной является задача проверить, может ли заданное число охранников наблюдать заданную галерею.)

Чтобы участники не подбирали решения, двигая светильники на 1 пиксель вперёд или назад, программа позволяла устанавливать светильники только в вершины расположенной на поле крупной сетки.

Результаты участников

Задача не оказалась сложной для участников. Из почти 600 участников первого уровня 127 человек осветили город 14 фонарями, 203 человека — 15 фонарями, 82 — 16 фонарями, а остальные использовали 17 и более.

Во втором уровне из примерно 440 участников 110 человек поставили 21 светильник, 81 — 22 светильника, 101 — 23 светильника, остальные — 24 и более.

Можно ли улучшить эти результаты и осветить город, например, не четырнадцатью фонарями, а тринадцатью? Опыт участников позволяет предположить, что скорее всего нет. Слишком многие придумали решение для четырнадцати, но никто из них не придумал для тринадцати. Оставим вопрос существования решения для тринадцати открытым, но докажем, что двенадцати фонарей не хватит никак.

На рис. 3 обозначены 13 точек. Они не находятся в вершинах сетки, как следует находиться расставляемым светильникам. Это просто точки, каждая из которых по условию задачи должна быть освещена. Вокруг каждой точки изображена область, в которой обязан находиться светильник, чтобы свет из него достигал этой точки. Самое важное — 13 точек подобраны так, что соответствующие им области не пересекаются. Это значит, что если город освещён полностью, то в каждой из областей должен находиться как минимум один светильник. Но областей 13, значит и светильников как минимум 13.

Итак, менее чем 13 светильниками обойтись невозможно. Но, повторим, вопрос, хватает ли для освещения 13 светильников, остался открытым.

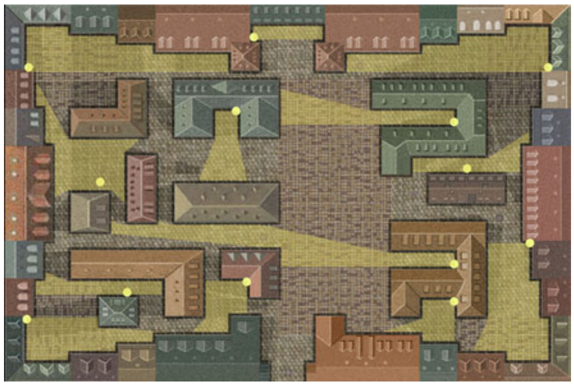


Рис. 3. Для освещения города необходимо минимум 13 светильников

Обсуждение задачи

Задача о картинной галерее изучена хорошо. Использованная здесь постановка, как уже было сказано, делает задачу *NP*-полной и, следовательно, вряд ли существует алгоритм расстановки минимального числа охранников, работающий значительно эффективнее полного перебора вариантов. Более того, неизвестны и вряд ли существуют эффективные алгоритмы, которые решают задачу приближённо. Например так, что получаемое число охранников не более чем в константу раз превышает минимальное.

Но отойдём от исходной постановки, забудем про форму города и лабиринта, и поставим задачу иначе: «Какое минимальное число охранников необходимо, чтобы наблюдать произвольный n-угольник?» (Пока мы не будем обсуждать многоугольники с дырами, хотя дыры есть на карте города и лабиринта.)

При $n = 3$ получается треугольник, и очевидно, что для наблюдения за произвольным треугольником достаточно всего одного охранника. Обозначим этот факт так: $g(3) = 1$. При $n = 4$ получается четырехугольник, который может быть выпуклым или невыпуклым, но в обоих случаях его также можно наблюдать одним охранником. Следовательно, $g(4) = 1$. Три принципиально разных варианта формы пятиугольника изображены на рис. 4. Опять же, независимо от формы пятиугольника, для наблюдения за ним достаточно одного охранника: $g(5) = 1$.

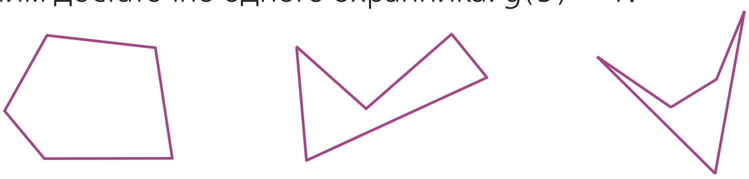


Рис. 4. Пятиугольники

В случае шестиугольника картина меняется. На рис. 5 приведены два примера шестиугольников, для которых недостаточно одного охранника, а необходимо использовать двоих: $g(6) = 2$.

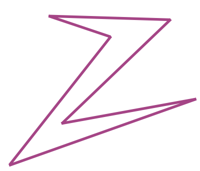


Рис. 5. Шестиугольники

Так можно продолжать и далее, но мы остановимся. Оказывается, $g(n) = [n/3]$, где $[x]$ означает целую часть числа x. Из всех теорем, связанных с задачей о картинной галерее, эта — самая простая, и далее мы её докажем. Известны похожие оценки для случая многоугольников с дырами, ортогональных многоугольников (т.е. таких, как в задаче: все стороны многоугольника расположены либо вертикально, либо горизонтально), мы приведём их, но доказывать не будем, это на порядок сложнее, а доказательство любознательный читатель может посмотреть в книге [1].

Теорема. В любом n-угольнике можно найти $[n/3]$ точек таких, что они наблюдают весь n-угольник.

При доказательстве мы увидим, что в качестве этих точек на самом деле можно выбрать вершины. Так же отдельно можно показать, что $[n/3]$ — точная оценка, т.е. иногда для наблюдения за n-угольником необходимо ровно столько охранников. Рис. 6 поясняет сказанное.

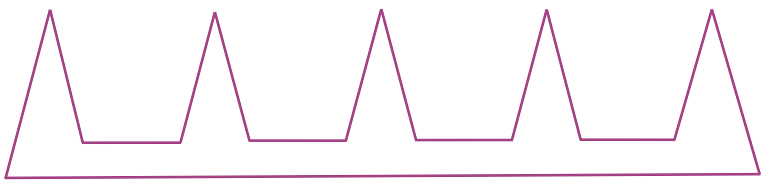


Рис. 6. Многоугольники этой формы требуют ровно [n/3] охранников для наблюдения

Доказательство. Приведём сначала набросок доказательства. Первым делом докажем известный факт — любой многоугольник можно триангулировать, т.е. разбирать диагоналями на треугольники. Далее, мы покажем, что вершины многоугольника можно покрасить в три цвета так, что каждый треугольник разбиения будут иметь вершины трёх разных цветов (см. рис. 7). Этого достаточно для доказательства. Действительно, если n вершин покрашены в 3 цвета, то какой-то цвет встречается не более чем $[n/3]$ раз. Допустим, это зелёный цвет. Поместим во всех вершинах зелёного цвета по охраннику. Но каждый треугольник по построению имеет вершину зелёного цвета, следовательно, каждый треугольник будет наблюдаться одним из охранников. Тогда и весь n-угольник будет наблюдаться охранниками.

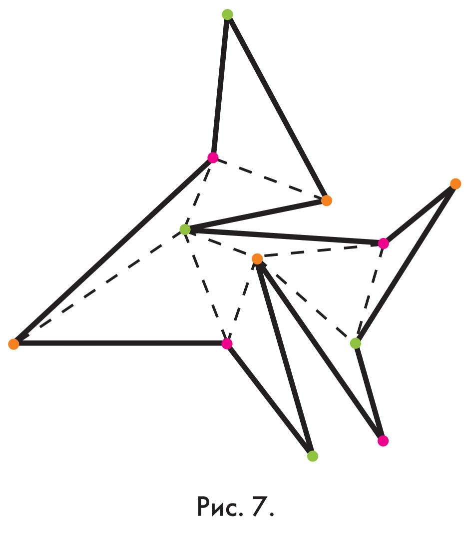


Рис. 7.

Итак, докажем, что любой многоугольник можно триангулировать диагоналями. Для этого достаточно показать, что в любом многоугольнике можно провести хотя бы одну диагональ, находящуюся полностью внутри многоугольника. Потому что если такая диагональ проведена, то многоугольник распадается на два, в каждом из которых также можно провести диагональ, и продолжаться это будет, пока многоугольник не разобьётся на треугольники. Почему всегда можно провести внутреннюю диагональ? Предположим, что наш многоугольник выпуклый. В этом случае любая диагональ является внутренней, и провести можно любую диагональ.

В невыпуклом многоугольнике есть вершина с углом более 180 градусов. Покажем, что из неё можно провести внутреннюю диагональ. Так как угол при вершине больше 180 градусов, то из этой вершины видны несколько отрезков сторон, потому что каждый отрезок стороны виден под углом менее 180 градусов (см. рис. 8, видимые отрезки выделены синим цветом). В направлениях (обозначены пунктиром), в которых происходит смена видимого отрезка, можно провести внутреннюю диагональ. На рисунке это диагонали AB и AC.

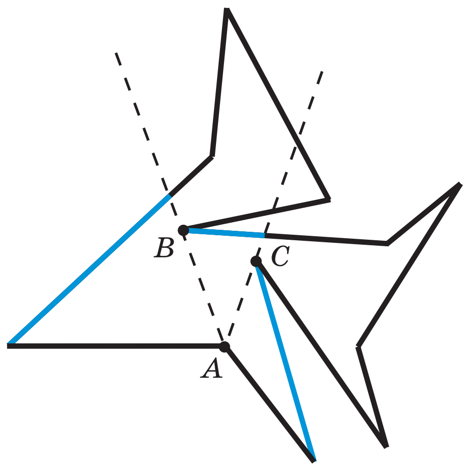


Рис. 8.

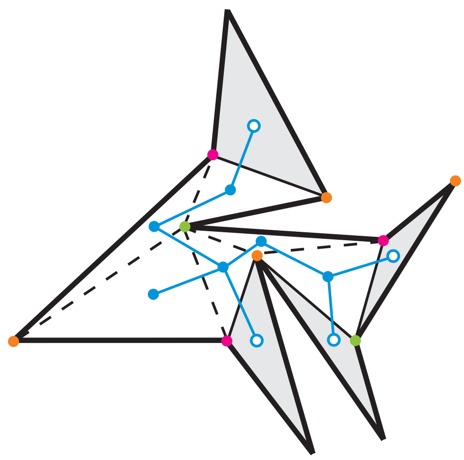


Рис. 9.

Почему полученную триангуляцию можно покрасить в 3 цвета? Рассмотрим граф, в котором вершины соответствуют треугольникам, и две вершины соединены, если соответствующие им треугольники имеют общую сторону (см. рис. 9). Нетрудно понять, что этот граф является деревом (для многоугольников с дырами это неверно). Действительно, если бы в графе нашёлся цикл, он бы означал, что есть цикл из треугольников, внутри него вершина, т.е. и внешняя часть многоугольника. В случае многоугольников без дыр это невозможно.

Любое дерево имеет как минимум две висячие вершины, т.е. вершины, из которых выходит ровно одно ребро. Такие вершины соответствуют треугольникам-ушам, которые можно отрезать, и многоугольник останется многоугольником. Отрежем триангулированному многоугольнику уши и раскрасим его в три цвета. То есть мы считаем, что раскрашиваем многоугольник по индукции, и более маленький многоугольник раскрасить можно. Далее приделаем уши обратно. Две вершины треугольника-уха уже имеют цвета, оставшуюся третью вершину надо покрасить в третий ещё неиспользованный цвет.

Таким образом, теорема доказана.

Другие типы многоугольников

В предложенной на конкурсе задаче многоугольники были ортогональными, то есть, как говорилось ранее, их стороны расположены только вертикально и горизонтально. Углы в ортогональных многоугольниках равны 90 либо 270 градусов. Количество охранников, которое требуется для наблюдения такого многоугольника, меньше, чем для произвольного многоугольника. Аналогом теоремы из прошлого раздела является теорема, что для ортогонального многоугольника достаточно $[n/4]$ охранника. Эта оценка точна, то есть некоторые ортогональные многоугольники требуют ровно такого и не меньшего числа охранников. Доказать эту теорему значительно сложнее, чем предыдущую; разбиения многоугольника на треугольники уже недостаточно, и следует разбивать многоугольник на фигуры другой формы.

Дополнительной особенностью многоугольников из конкурса было то, что они содержали дыры. Для многоугольников с h дырами известно, что они наблюдаются $[(n + 2h)/3]$ охранниками. Или же $[(n + 2h)/4]$ охранниками для ортогональных многоугольников с ортогональными дырами. Здесь n – количество вершин вообще, включая вершины, соответствующие дырам.

Существует гипотеза, что ортогональный многоугольник с дырами на самом деле наблюдается и $[n/4]$ охранниками. Для одной и двух дыр, то есть для $h = 1$ и $h = 2$ эта гипотеза доказана. Также есть и другие гипотезы. Согласно им для наблюдения за ортогональным многоугольником с дырами достаточно $[(n + h)/4]$ и $[3n/11]$ охранников соответственно.

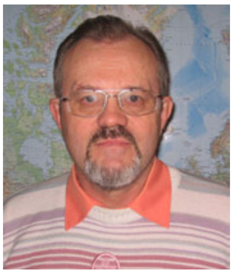
Литература

1. *O'Rourke J.* Art Gallery Theorems and Algorythms. Oxford University Press, 1987.

Вернуться к содержанию

Учим математике

Очерки по методике преподавания стохастики (Часть 1)



Александр Васильевич ЯСТРЕБОВ
зав. кафедрой методики преподавания математики Ярославского государственного педагогического университета им. К.Д. Ушинского
a.yastrebov@yspu.yar.ru

От редактора. Введение в школу теории вероятностей привело к росту числа публикаций, посвящённых преподаванию этого раздела математики школьникам (газета «Математика» и журнал «Математика в школе» даже посвятили этим вопросам отдельные номера). В 2009 г. в Ярославле небольшим тиражом вышло интересное пособие «Избранные вопросы методики преподавания стохастики»[1]. Тематика его традиционна: комбинаторика, теория вероятностей, статистический анализ данных. Первые две главы пособия – «Комбинаторика» и «Случайные события» – любезно предоставлены авторами их для публикации в журнале «Полином».

Введение

Настоящая статья предназначена для особой категории читателей: учителей школ, студентов педагогических вузов и студентов классических университетов, готовящихся к преподавательской деятельности. Специфика данной категории читателей состоит в том, что они уже изучали комбинаторику, теорию вероятностей и математическую статистику, причём в объёме, далеко выходящем за рамки школь-

[1] *Большакова Г.Н., Карпова Т.Н., Мурина И.Н., Ястребов А.В.* Избранные вопросы методики преподавания стохастики: Учебное пособие / Под ред. А.В. Ястребова. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ; Городской центр развития образования, 2009.

ной программы. Даже если обучение происходило давно, перед читателем лежит напоминание в виде школьного учебника и книги для учителя. Таким образом, потенциальный читатель настоящего пособия не нуждается в изложении математических фактов.

В статье рассматриваются методические особенности изложения материала. При этом внимание обращено на те узловые точки, которые, по нашему мнению, имеют решающее значение. Очевидно, что одной из таких точек является первоначальное введение понятий – типов соединений, различных определений вероятности (классического, геометрического, статистического). Применительно к теории вероятностей показано, что иллюстрация понятий и доказательства теорем могут быть выполнены в рамках геометрического подхода к вероятности, причем математически точно и в то же время доступно для школьников. Наконец, изучение математики невозможно без решения большого количества задач. Во второй части статьи будет приведена одна из возможных типологий вероятностных задач, причём достаточно полная. Важно только помнить о том, что никакой список типов заданий не может быть абсолютно полным, поскольку многообразие задач, решаемых методами теории вероятностей, чрезвычайно велико и не укладывается в рамки жёсткой классификации.

Комбинаторика

§ 1. Дерево вариантов, правила произведения и суммы

Можно начать изучение темы с постановки проблемного вопроса: «Почему в городе Угличе телефонные номера пятизначные, в Ярославле – шестизначные, в Москве – семизначные, номера сотовых телефонов – десятизначные, не считая первой цифры?». Обычно следует ответ: «Количество цифр в телефонном номере связано с числом жителей: чем больше численность населения города, тем больше цифр содержится в его телефонных номерах». Появляется следующая подзадача: «Как узнать, какие же телефонные номера целесообразнее использовать в конкретном населённом пункте?».

Очевидно, что при ответе на этот вопрос нас будут интересовать не сами телефонные номера, а их количество, то есть количество различных цифровых *комбинаций* нужной длины.

Комбинаторика – это раздел математики, в котором исследуются и решаются задачи выбора элементов из исходного множества и расположения их в некоторой комбинации, составляемой по заданным правилам.

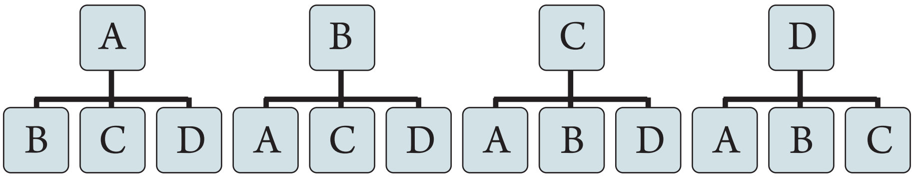
С простейшими комбинаторными задачами учащиеся знакомятся в 5–6-х классах. Чаще всего в этих задачах составляются все возможные комбинации, а затем подсчитывается их количество. При этом важно обратить внимание учащихся на организацию переборов, чтобы не потерять каких-либо ситуаций или не указать одинаковые комбинации дважды. Существенно облегчают задачу переборов составление таблицы или дерева возможных вариантов. Рассмотрим несколько заданий.

Задача 1. Стадион имеет четыре входа: A, B, C и D. Укажите все возможные способы, какими посетитель может войти через один вход, а выйти через другой. Сколько таких способов?

Решение задачи может быть оформлено с помощью таблицы:

Войти	A	B	C	D
Выйти	B, C, D	A, C, D	A, B, D	A, B, C

или дерева возможных вариантов:



Теперь легко подсчитать количество возможных вариантов: 4·3 = 12.

Целесообразно дать следующий комментарий: войти можно через любой из *четырёх* входов, то есть четырьмя различными способами, а выйти через *три* различных входа, то есть тремя различными способами, поэтому всего вариантов 4·3.

Задача 2. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 8, 9?

Решение. Первая цифра не может быть нулём, поэтому имеется *шесть* вариантов выбора первой цифры: 2, 4, 5, 7, 8, 9. Вторая цифра может быть *любой из семи* указанных, поэтому общее количество двузначных чисел находится по формуле 6·7 = 42.

Две рассмотренные задачи (а в случае необходимости и другие задачи того же типа) являются основанием для формулировки так называемого правила произведения.

Правило произведения. Если элемент *A* может быть выбран *t* способами, и после каждого из таких выборов элемент *B* может быть выбран *s* способами, то выбор «*A* и *B*» может быть осуществлен *t*·*s* способами.

Теперь можно вернуться к первоначальной задаче. Согласно правилу произведения число четырёхзначных телефонных номеров равно 10·10·10·10 = = 10000. Этого явно недостаточно для Углича, поскольку его население составляет 40000 человек. В то же время число пятизначных телефонных номеров равно 10·10·10·10·10 = 100000. Таким образом, пятизначный телефонный номер вполне удобен для Углича. Однако он неудобен для Ярославля, поскольку население Ярославля составляет 650000 человек, то есть гораздо больше, чем число пятизначных телефонных номеров. В то же время, число шестизначных телефонных номеров равно 10·10·10·10·10·10 = 1000000, что существенно больше, чем население Ярославля. Таким образом, шестизначный телефонный номер вполне удобен для Ярославля. Предлагаем закончить наше рассуждение применительно к Москве, где живёт примерно 8 млн. человек.

Для закрепления сформулированного правила произведения и перехода к правилу сложения полезно решить следующие задачи.

Задача 3. а) Сколько чётных трёхзначных чисел можно составить из цифр 2, 3, 5, 6, 9? б) Сколько чётных трёхзначных чисел можно составить из этих цифр, если они не повторяются?

Задача 4. а) Сколько чётных трёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 5, 6? б) Сколько чётных трёхзначных чисел можно составить из этих цифр, если они не повторяются?

Решение задачи 4(б). Рассмотрим три случая, никакие два из которых не могут иметь место одновременно: 1) последняя цифра числа равна нулю; 2) средняя цифра числа равна нулю; 3) число не содержит нулей. В первом случае количество искомых чисел равно $4 \cdot 3 = 12$. Во втором случае количество искомых чисел равно $2 \cdot 3 = 6$. В третьем случае количество искомых чисел равно $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$. Общее количество искомых чисел с учётом всех трёх случаев равно $12 + 6 + 12 = 30$.

Последний логический ход в решении задачи сделан на основании так называемого правила суммы.

Правило суммы. Если элемент A может быть выбран t способами, а элемент B другими s способами, причем выборы A и B являются взаимно исключающими, то выбор «либо A, либо B» может быть осуществлен $t + s$ способами.

Для закрепления правила суммы можно решить следующую шуточную задачу.

Задача 5. У жителей планеты ХО в алфавите четыре буквы: А, В, О, Х. Слова в языке состоят не более чем из четырёх букв, причем буквы в слове не повторяются. Какое наибольшее количество слов может быть в словаре жителей этой планеты?

Решение. Очевидно, что количество однобуквенных слов равно 4. Согласно правилу произведения количество двухбуквенных слов равно $4 \cdot 3 = 12$, количество трёхбуквенных слов равно $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, а количество четырёхбуквенных слов равно $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Согласно правилу суммы общее количество слов равно $4 + 12 + 24 + 24 = 64$.

§ 2. Типы соединений и формулы подсчёта их количества

2.1. Перестановки

Изучение темы можно начать с рассмотрения трёх простых заданий.

Задача 1. В 9 «А» в среду 5 уроков: алгебра, геометрия, физкультура, русский язык и английский язык. Сколько вариантов расписания на этот день можно составить?

Решение. Очевидно, что первый урок можно выбрать пятью способами, второй – четырьмя и т.д. Согласно правилу произведения общее количество последовательностей уроков, то есть расписаний, равно $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Для краткости произведение чисел $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, то есть произведение натуральных чисел от одного до пяти, принято записывать в виде 5! Аналогично $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ и т.д.

Задача 2. Ольга точно помнит начало телефонного номера подруги. Она также помнит, что он оканчивается цифрами 5, 7, 8, но забыла, в каком порядке они идут. Каково то наименьшее количество звонков, которое гарантирует, что Ольга дозвонится до подруги?

Решение. Очевидно, что необходимо перебрать все возможные трёхзначные числа, составленные из цифр 5, 7 и 8. Очевидно также, что первую цифру можно выбрать тремя способами, вторую – двумя, а третья цифра определится однозначно. Согласно правилу произведения искомое число звонков равно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 = 3!$

Задача 3. Сколько шестизначных чисел (без повторений цифр) можно составить из цифр: 1, 2, 5, 6, 7, 8?

Решение. Рассуждая так же, как при решении предыдущей задачи, получаем, что количество чисел равно $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$.

Три рассмотренные задачи дают основание для следующего обобщения.

Обобщающая задача. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Сколько различных *упорядоченных* множеств можно составить из *всех* элементов данного множества?

Решение. Правило произведения даёт ответ: $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1 = n!$

Определение. Упорядоченное множество, состоящее из n элементов, называется ***перестановкой*** из n элементов.

Количество перестановок из n элементов принято обозначать через P_n. Таким образом, имеет место формула $P_n = n!$

2.2. Размещения

Как и в предыдущем пункте, начнём изучение темы с нескольких простых заданий.

Задача 1. Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 5, 6, 7, 8, если цифры в числе не повторяются?

Решение. Задача решается тем же способом, что и задачи пункта 2.1, то есть по правилу произведения. Мы получаем, что количество четырехзначных чисел равно $6\cdot5\cdot4\cdot3 = 360$.

Отметим важное отличие данной задачи от задач предыдущего пункта. Ранее количество выбираемых элементов было *равно* количеству элементов, имеющихся изначально. Именно поэтому в каждом из получаемых произведений сомножители убывают таким образом, что последний из них равен единице, так что мы получаем произведение вида $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1 = n!$ В задаче 1 количество выбираемых чисел *меньше*, чем количество чисел, имеющихся изначально, поэтому последний из сомножителей больше единицы и равен $6 - 4 + 1$. Важно, что здесь 6 и 4 – это данные задачи, то есть общее количество цифр и количество знаков в числе соответственно.

Задача 2. Из 25 участников собрания надо выбрать председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Пользуясь правилом произведения, получаем, что председателя и секретаря можно выбрать $25\cdot24 = 600$ способами.

Вновь мы видим, что количество выбираемых человек *меньше*, чем количество человек, имеющихся изначально, поэтому последний из сомножителей равен $25 - 2 + 1$. Вновь мы видим, что 25 и 2 – это данные задачи, то есть общее количество людей и количество выбираемых людей соответственно.

Задача 3. Сколькими способами можно изготовить трёхцветный флаг с одинаковыми горизонтальными полосами, если имеется материал семи различных цветов?

Решение. Как и в двух предыдущих случаях получаем ответ: $7\cdot6\cdot5 = 210$.

В третий раз получаем произведение убывающих сомножителей, первый из которых равен *общему количеству* элементов (материал *семи* цветов), а последний находится по формуле $7 - 3 + 1$, где 3 – количество выбираемых элементов (флаг *трёх* цветов).

Три рассмотренные задачи дают основание для следующего обобщения.

Обобщающая задача. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Сколько различных *упорядоченных* k-элементных подмножеств можно составить из элементов данного множества?

Решение. Правило произведения даёт ответ: $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$.

Определение. Упорядоченное k-элементное подмножество n-элементного множества называется ***размещением*** из n элементов по k.

Количество размещений из n элементов по k принято обозначать через A_n^k. Таким образом, имеет место формула

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Для закрепления материала учащимся можно предложить несколько упражнений.

1. На странице альбома 6 свободных мест для фотографий. Сколькими способами можно заполнить свободные места, вложив:

а) 2 фотографии; б) 4 фотографии; в) 6 фотографий?

Ответы: а) $A_6^2 = \frac{6!}{4!} = 30$; б) $A_6^4 = \frac{6!}{2!} = 360$; в) $P_6 = 6! = 720$.

2. Из трёхзначных чисел, записанных с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (без повторения цифр), сколько таких, в которых:

а) не встречаются цифры 6 и 7;

б) цифра 8 является последней?

Ответы: а) $A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 210$; б) $A_8^2 = \frac{8!}{6!} = 56$.

3. Сколькими способами четыре пассажира – Алексеев, Смирнов, Федоров и Харитонов – могут разместиться в 9 вагонах поезда, если:

а) все они хотят ехать в разных вагонах;

б) Алексеев и Смирнов хотят ехать в одном вагоне, а Федоров и Харитонов – в других вагонах, причём различных?

Ответы: а) $A_9^4 = \frac{9!}{5!} = 3024$; б) $A_9^3 = \frac{9!}{6!} = 504$.

2.3. Сочетания

Как и в предыдущих пунктах, начнём изучение темы с нескольких простых заданий.

Задача 1. В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами из них можно выбрать двоих для участия в математической олимпиаде?

Решение. В процессе решения задачи уточняется, что пары Иванов-Петров и Петров-Иванов в данной ситуации не различимы, то есть порядок элементов в выбранных подмножествах не важен. Этим данная задача отличается от предыдущих задач. В силу этого можно сосчитать количество размещений из 7 элементов по 2, а затем полученное число поделить на два: $\frac{7\cdot 6}{2} = 21$.

Задача 2. Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Дима хочет 6 из них взять на дачу. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. При анализе условия задачи выясняем, что нас интересуют 6-элементные подмножества 10-элементного множества, причем порядок элементов в подмножествах не важен. Подсчитаем сначала количество размещений из десяти элементов по шесть: $A_{10}^{6}=\frac{10!}{4!}$. Если выбрано шестиэлементное подмножество, то из него можно составить $P_6 = 6!$ перестановок, которые с точки зрения данной задачи неразличимы. В силу этого искомое количество способов будет равно $\frac{A_{10}^{6}}{P_6}=\frac{10!}{4!\cdot 6!}=210$.

Две рассмотренные задачи дают основание для следующего обобщения.

Обобщающая задача. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Сколько различных k-элементных подмножеств можно составить из элементов данного множества?

Решение. Рассуждая так же, как при решении задачи 2, получаем, что $\frac{A_n^k}{P_k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Определение. k-элементное подмножество n-элементного множества называется ***сочетанием*** из n элементов по k.

Количество сочетаний из n элементов по k принято обозначать через C_n^k. Таким образом, имеет место формула $C_n^k=\frac{A_n^k}{P_k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

2.4. Систематизация и закрепление материала

Для систематизации полученных знаний о соединениях целесообразно составить с учащимися таблицу, которой будут содержаться термины, формулы и типичные задачи. Примером может служить следующая таблица:

Имеем	***n*–элементное множество**		
Составляем	n–элементные *упорядоченные* подмножества	k–элементные *упорядоченные* подмножества	k-элементные подмножества
Используем термин	*Перестановки* из n элементов	*Размещения* из n элементов по k	Сочетания из n элементов по k
Вычисляем	$P_n = n!$	$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k=\frac{A_n^k}{P_k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$
Пример	Сколькими способами можно изготовить трёхцветный флаг с одинаковыми горизонтальными полосами, если имеется материал трёх различных цветов?	Сколькими способами можно изготовить трёхцветный флаг с одинаковыми горизонтальными полосами, если имеется материал четырёх различных цветов?	Сколькими способами можно составить букет из трёх различных гвоздик, если имеется четыре гвоздики разного цвета?

При решении комбинаторных задач важно обращать внимание учащихся на два момента:

- все ли элементы множества входят в составляемое подмножество;
- имеет ли значение порядок элементов в составляемом подмножестве.

В задачах на повторение и закрепление темы рассматриваются все типы соединений, правило произведения и правило суммы. Приведем примеры таких задач.

Задача 1. В классе 27 учеников. К доске нужно вызвать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если:

а) первый ученик должен решить задачу по алгебре, а второй – по геометрии;

б) они должны быстро стирать с доски.

Ответы: а) $A_{27}^2 = 27 \cdot 26 = 702$; б) $C_{27}^2 = \dfrac{27!}{25! \cdot 2!} = 351$.

Задача 2. Из 20 вопросов к экзамену Вова 12 вопросов выучил, 5 совсем не смотрел, а в остальных что-то знает, а что-то нет. На экзамене в билете будет три вопроса.

а) Сколько существует вариантов билетов?

б) Сколько из них тех, в которых Вова знает все вопросы?

в) Сколько из них тех, в которых Вова не знает ни одного вопроса?

г) Сколько из них тех, в которых вопросы всех трёх типов?

Ответы: а) $C_{20}^3 = \dfrac{20!}{3! \cdot 17!} = 1140$; б) $C_{12}^3 = \dfrac{12!}{3! \cdot 9!} = 220$; в) $C_5^3 = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$; г) $12 \cdot 5 \cdot 3 =$ $= 180$.

Задача 3. «Вороне как-то Бог послал кусочек сыра», брынзы, колбасы, сухарика и шоколада. «На ель Ворона взгромоздясь, позавтракать совсем уж было собралась, да призадумалась» вот о чем.

а) Если есть кусочки по очереди, то из скольких вариантов придётся выбирать?

б) Сколько получится «бутербродов» из двух кусочков?

в) Если съесть сразу три кусочка, а остальные спрятать, то из скольких вариантов придется выбирать?

г) Сколько получится вариантов, если какой-то кусочек всё-таки бросить Лисе, а потом ответить на вопрос пункта а)?

Ответы: а) $P_5 = 5! = 120$; б) $C_5^2 = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$; в) $C_5^3 = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$; г) $5 \cdot 4! = 120$.

В заключение отметим, что при составлении задач на систематизацию и закрепление материала необходимо учитывать конкретные педагогические условия, в которых работает тот или иной учитель. В силу этого количество таких задач, их типы, конкретные сюжеты, уровень сложности и проч. должны быть определены им самостоятельно.

Случайные события

§ 1. Первоначальное введение терминологии. Классическое определение вероятности

Человек, приступающий к ознакомлению с новой для себя областью знания, вольно или невольно усваивает большое количество терминов. Это в полной мере относится и к учащемуся, приступающему к изучению теории вероятностей. Учитель может облегчить для него этот процесс, если будет систематически использовать те выражения бытового русского языка, которые перешли в математику и приобрели там статус точных терминов. Так, превращение свинца в золото *невозможно* (вспомните историческое заблуждение!). Падение астероида на Землю *маловероятно*, хотя такие случаи имели место. Мы *достоверно* знаем, что день сменяется ночью. Хороший урожай яблок в этом году – *событие случайное*, так как урожай может быть и хорошим, и плохим. Данный список примеров выбран нарочито приземлённым, однако выработка терминов в науке очень часто базируется именно на наглядных соображениях. Вот что писал по этому поводу Р. Декарт: «Всякий раз, когда я хочу ввести новый специальный термин, я выбираю его из слов, находящихся в употреблении, и то из них, которое мне кажется самым подходящим, я всегда употребляю в установленном мной значении»[2].

Опишем игру, в результате которой в обиходе учащегося появится целый список терминов из области стохастики.

Игра. В закрытом пакете находятся 10 предметов, а именно: 5 мандаринов, 2 яблока, 2 конфеты и 1 лимон. Учитель предлагает учащимся *угадать*, какие предметы находятся в пакете, обещая затем реально извлечь эти предметы и показать классу. Два заранее вызванных помощника фиксируют на доске ответы.

Заметим, что хотя ситуация выглядит крайне неопределённой, из неё можно извлечь некоторую информацию. Действительно, 10 предметов небольшого размера позволяют сделать вывод, что в пакете находятся *маленькие предметы*. Можно показать сквозь пакет, что там находится нечто *круглое*. Наконец, утверждение о том, что в пакете находится нечто *съедобное*, является одной из двух естественных альтернатив и напоминает детскую игру.

Итак, учитель «для затравки» предлагает слово «съедобное», а затем учащиеся высказывают другие гипотезы. После нескольких гипотез начинается реальное извлечение предметов, результаты которого также фиксируются. В итоге на доске возникает какой-либо список предметов, например, такой: съедобное, несъедобное, фрукт, лимон, игрушка, цитрус, маленький предмет, мячик, конфета, яблоко, мандарин.

Заметим, что следует позаботиться о том, чтобы в списке слов появились такие, которые соответствуют и невозможным, и достоверным событиям. Это нетрудно сделать, потому что учитель является участником игры и наравне со всеми вносит свои предложения.

Теперь нужно *проанализировать* эту игру и *классифицировать* события, случившиеся в результате извлечения предметов, реального или гипотетического.

Классификация событий. Нетрудно видеть, что в нашем эксперименте некоторые события произойдут *обязательно*, например, извлечение съедобного предмета. Другие *не могут* произойти, например, извлечение игрушки. Третьи *случайны*, то есть могут произойти, а могут и не произойти, например, извлечение конфеты. Подчеркнув соответствующие слова разными способами, получим классифицированный список, который выглядит следующим образом:

съедобное, *несъедобное*, фрукт, лимон, *игрушка*, цитрус,
конфета, *мячик*, яблоко, ***маленький предмет,*** мандарин.

---

[2] Цит. по: Решение задач по статистике, комбинаторике и теории вероятностей. 7–9 классы. Авт.-сост. В.Н. Студенецкая. Волгоград: Учитель, 2006. С. 34.

Очевидно, что жирным курсивом отмечено достоверное событие, курсивом отмечено невозможное событие, а обычным шрифтом – случайное событие.

Теперь учащиеся психологически готовы к введению терминов и выявлению классификации событий.

Будем называть ***испытанием*** такое действие, которое осуществляется при выполнении совокупности некоторых условий. В нашей игре условиями являются закрытый пакет с определенным набором предметов в нём, а действием является извлечение предмета.

Будем называть ***исходами испытания*** те простейшие события, реальные или гипотетические, которые могут произойти в результате испытания. Они называются также ***элементарными событиями.*** В нашей игре имеется четыре реальных исхода испытания – извлечение мандарина, яблока, конфеты, лимона.

Будем называть ***событием, связанным с испытанием***, или просто ***событием***, исход испытания или какую-либо комбинацию исходов испытания. В нашей игре примерами событий являются извлечение цитруса (комбинация исходов мандарин – лимон), извлечение фрукта (комбинация исходов мандарин – лимон – яблоко), а также извлечение чего-либо съедобного.

Событие называется ***невозможным***, если оно не может произойти при данном испытании. В нашей игре примерами невозможных событий являются извлечение мячика или извлечение игрушки.

Событие называется ***достоверным***, если оно обязательно происходит при данном испытании. В нашей игре примерами достоверных событий являются извлечение маленького предмета и извлечение съедобного предмета.

Наконец мы подходим к центральному определению. Событие называется **случайным**, если при данном испытании оно может произойти или не произойти. В нашей игре можно извлечь лимон или нечто другое, следовательно, извлечение лимона является случайным событием. Аналогично, случайными событиями являются извлечение конфеты, яблока, фрукта и т.д.

Суммируем итоги наших рассуждений и фиксируем их в виде рис. 1. Мы видим, что события подразделяются на невозможные и возможные. Возможные, в свою очередь, подразделяются на достоверные и случайные. Именно случайные события будут предметом нашего дальнейшего изучения, поэтому на рис. 1 они выделены красным цветом.

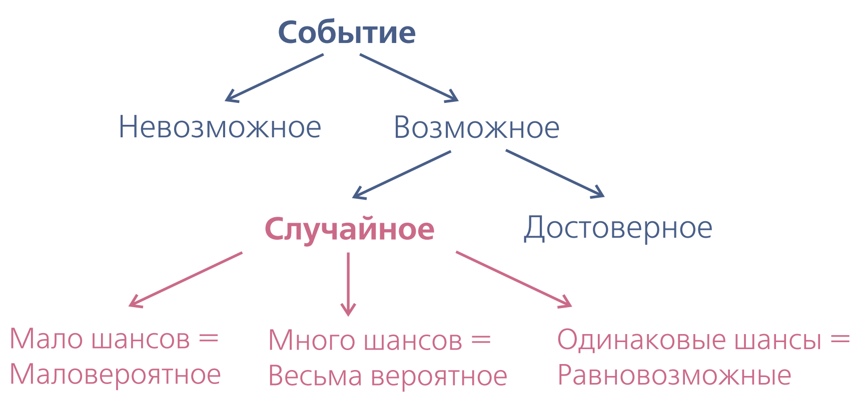


Рис. 1.

Заметим, что при работе в классе целесообразно предъявлять не сразу весь рис. 1, а заполнять его постепенно по мере накопления терминов. На данный момент целесообразно заполнить пять верхних блоков и оставить место для трёх нижних.

До сих пор мы проводили *качественный* анализ нашего испытания, не привлекая для анализа числа. Теперь проведем *количественный* анализ и выявим с его помощью *типологию шансов* наступления того или иного события.

Типология шансов. Рассмотрим и оценим шансы наступления некоторых событий, связанных с проведённым испытанием. Для этого заполним таблицу оценки шансов.

№	Много ли шансов достать ... ?	Шанс	Число	Оценка
1	лимон	1 шанс из 10	1/10	*Мало* шансов
2	конфету	2 шанса из 10	2/10	*Мало* шансов
3	яблоко	2 шанса из 10	2/10	*Мало* шансов
4	мандарин	5 шансов из 10	5/10	
5	цитрус	6 шансов из 10	6/10	
6	фрукт	8 шансов из 10	8/10	***Много*** шансов
7	не мандарин	5 шансов из 10	5/10	
9	не яблоко	8 шансов из 10	8/10	***Много*** шансов
8	не лимон	9 шансов из 10	9/10	***Много*** шансов
10	не цитрус	4 шанса из 10	4/10	
11	съедобное	10 шансов из 10	10/10	***Много*** шансов
12	не съедобное	0 шансов из 10	0/10	*Мало* шансов

1. Естественно считать, что если событие не наступает никогда или происходит в 1–2 случаях из 10, то оно имеет *мало шансов* для реализации. Если же событие происходит в 8–9 случаях из 10 или же наступает обязательно, то оно имеет *много шансов* для реализации. Сделаем соответствующие записи в предпоследнем столбце таблицы. Мы видим, что ряд клеток столбца остались пустыми. Это означает, что оценить шансы с бытовых позиций затруднительно, или, другими словами, такая оценка зависит от важности события с точки зрения оценивающего. Действительно, вполне допустимо проиграть 5 из 10 партий в шахматы, или, что то же самое, проиграть одну партию из двух. Однако было бы совершенно недопустимо, если бы одна болезнь из двух заканчивалась смертью больного.

2. Примем следующее соглашение. Если событие имеет мало шансов для реализации, то оно называется *маловероятным.* Если же событие имеет много шансов для реализации, то оно называется *весьма вероятным.* Занесём эти термины на рис. 1.

3. Сравним два события – «извлечение лимона» и «извлечение мандарина». У какого события больше шансов для реализации? Из таблицы видно, что лимон извлекается в одном случае из 10 возможных, а мандарин – в пяти случаях из десяти. На русском языке это выражается двумя *равноправными* способами:

а) извлечение лимона ***менее вероятно, чем*** извлечение мандарина;

б) извлечение мандарина ***более вероятно, чем*** извлечение лимона.

4. Сравним два события, «извлечение конфеты» и «извлечение яблока». У какого события больше шансов для реализации? Из таблицы видно, что шансы этих событий равны, а именно, 2 шанса из 10. Аналогично, шансы событий «извлечь фрукт» или «извлечь не яблоко» также равны, а именно 8 шансов из 10. Будем называть два события *равновозможными,* если они имеют равные шансы для реализации. Занесём этот термин на рис. 1. Теперь он полностью завершён.

Систематизация и закрепление материала. После того как первоначальные термины введены, целесообразно провести тренировку, которая должна быть достаточной для их полного усвоения. Содержание такой тренировки, её характер и длительность зависят от тех педагогических условий, в которых работает конкретный учитель, так что их организация остается на его усмотрение.

Приведем примеры таких упражнений. Следует подчеркнуть, что мы отнюдь не считаем нижеследующие упражнения обязательными или достаточными для достижения наших целей.

1. В условиях вышеописанной игры вставьте слова «более вероятно, чем» или «менее вероятно чем» вместо многоточия.

а) Извлечение конфеты ... извлечение мандарина.

б) Извлечение мандарина ... извлечение конфеты.

в) Извлечение цитруса ... извлечение лимона.

г) Извлечение лимона ... извлечение цитруса.

2. Испытанием является бросание игральной кости. Вот некоторые вопросы, которые можно поставить перед учащимися.

а) Перечислите возможные исходы испытания. Равновозможны ли они?

б) Назовите какие-либо события, связанные с испытанием, но не являющиеся его исходами.

в) Приведите *несколько* примеров достоверных событий.

г) Приведите *несколько* примеров невозможных событий.

д) Равновозможны ли два события: «выпадение простого числа» и «выпадение нечетного числа»?

е) Равновозможны ли два события: «выпадение делителя числа 6» и «выпадение делителя числа 4»? Если нет, то сравните шансы наступления этих событий двумя способами, используя словосочетания «более вероятно, чем» и «менее вероятно, чем».

Очевидно, что даже простые испытания порождают большое количество вопросов, причём для данных примеров список возможных вопросов отнюдь не исчерпан. Одним из естественных способов тренировки школьников является постановка ими каких-либо собственных вопросов, задаваемых одноклассникам.

Педагогическая рефлексия. Анализируя извлечение предметов из пакета, мы естественным образом и в игровой форме ввели достаточно много терминов, а именно, *девять*. По-видимому, одним из компонентов педагогического искусства является умение подобрать частный пример, на котором будут отчётливо видны все закономерности общего случая. Мы убеждены, что подбор таких примеров возможен для многих или даже для большинства тем математики. В целесообразности таких примеров мы и попытались убедить читателя.

Точные определения. В заключение приведем одно из определений вероятности события – классическое определение вероятности.

Несколько исходов испытания образуют ***полную группу событий,*** если в результате испытания произошло хотя бы одно из них.

Если события из полной группы событий попарно несовместны, то в результате испытания появится *точно одно* из них.

Вероятностью события называется отношение числа исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу всех равновозможных, несовместных элементарных событий, образующих полную группу событий: $P(A)=\frac{k}{n}$.

§ 2. Геометрическое определение вероятности, или Визуализация в стохастике с помощью диаграмм Эйлера

> Подобные представления об этих вещах весьма полезны, поскольку ничто не является для нас более наглядным, чем фигура, ибо её можно осязать и видеть.
>
> *Р. Декарт*

Классическое определение вероятности, будучи удобным и естественным, имеет свои слабые стороны. Во-первых, оно предполагает, что число элементарных исходов испытания является конечным. На практике же весьма часто встречаются испытания, число возможных исходов которого бесконечно. В таких случаях классическое определение вероятности неприменимо. Во-вторых, очень часто невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий. В-третьих, бывает крайне трудно указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными. Таким образом, необходимо предпринять специальные усилия для преодоления слабых сторон классического определения. Одним из таких способов является рассмотрение геометрического определения вероятности, которому посвящен этот параграф.

Прежде чем говорить о геометрическом определении вероятности, посмотрим на наш предмет с психолого-педагогической точки зрения. Бросается в глаза, что пока у нас отсутствует наглядный образ понятия вероятности. Такой образ, если удастся его построить, должен обладать двумя взаимно дополнительными свойствами. С одной стороны, он должен подключать к изучению вероятностей органы чувств, а не только логику. С другой стороны, он должен быть достаточно конструктивным, то есть давать возможность иллюстрировать понятия и доказывать теоремы из области стохастики. Построение такого образа мы начнем с общенаучных понятий модели и моделирования и более частного понятия визуализации.

Классическое понятие модели таково: «Под *моделью* понимается такая мысленно представляемая или материально реализованная система, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что её изучение даёт нам новую информацию об этом объекте»[3]. Процесс построения и/или изучения модели называется моделированием. Приведём несколько примеров.

1) *Объект* – свободно колеблющийся маятник. *Модель* – дифференциальное уравнение $x'' + \omega^2 x = 0$.

2) *Объект* – электрическая цепь постоянного тока. *Модель* – система линейных уравнений, составленная по законам Кирхгофа.

3) *Объект* – тело, брошенное под углом к горизонту. *Модель* – параметрически заданная функция $\begin{cases} x = x_0 + v_1 t, \\ y = y_0 + v_2 t - \dfrac{gt^2}{2}, \end{cases}$ где v_1 и v_2 – горизонтальная и вертикальная составляющие скорости соответственно.

4) *Объект* – текст геометрической задачи. *Модель* – соответствующий чертеж.

5) *Объект* – аналитически заданная функция. *Модель* – эскиз ее графика.

6) *Объект* – алгоритм, записанный на одном из языков программирования. *Модель* – блок-схема алгоритма.

Будем говорить, что модель называется *зрительным образом* объекта, если при её изучении активно используются органы зрения. Процесс построения зрительного образа будем называть ***визуализацией*** объекта.

Очевидно, что модели, фигурирующие в примерах 1–3, имеют знаково-символическую природу, так что получение информации об этих моделях непосредственно с помощью органов зрения проблематично. Модели, фигурирующие в примерах 4–6, являются зрительными образами объектов, так что процесс построения этих моделей можно назвать визуализацией объектов.

Теперь мы можем привести геометрическое определение вероятности события.

Пусть внутри плоской фигуры U находится плоская фигура A. На фигуру U наудачу бросается точка. ***Вероятностью*** попадания точки на фигуру A называется число $P(A)$, определяемое равенством $P(A) = \dfrac{S_A}{S_U}$, где S_A и S_U – площади фигур A и U соответственно. При этом всегда предполагается, явно или неявно, что брошенная точка может оказаться в любой точке фигуры U и что результат испытания не зависит ни от форм фигур, ни от расположения фигуры A внутри фигуры U.

Шутливым, но точным образом описанной ситуации является следующий. На газон U случайным образом падает капля дождя. Вероятность её попадания на клумбу A, находящуюся на газоне, равна отношению площадей клумбы и всего газона.

Проведем визуализацию ряда понятий и теорем теории вероятностей. При этом мы иногда будем пользоваться «официальными» терминами «фигура» и «площадь фигуры», а иногда будем использовать рассуждения на уровне газонов и клумб. Рекомендуем читателю каждый раз дополнять точные рассуждения шутливыми, а шутливые – точными.

Понятие ***полной группы событий*** может быть проиллюстрировано рисунком 2.

---

[3] *Штоф В.А.* Моделирование и философия. М.–Л., 1966. С. 19.

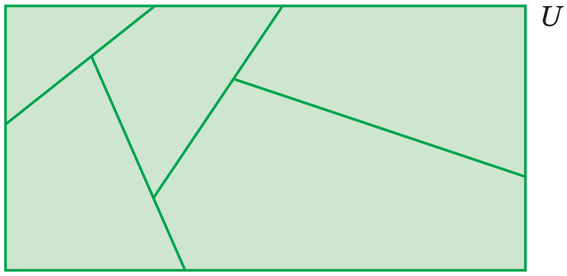


Рис. 2.

Событие: капля дождя падает на данный сектор газона. Полная группа событий: капля дождя падает на первый, второй и т.д. сектор газона.

Понятие ***противоположных событий*** может быть проиллюстрировано рисунком 3.

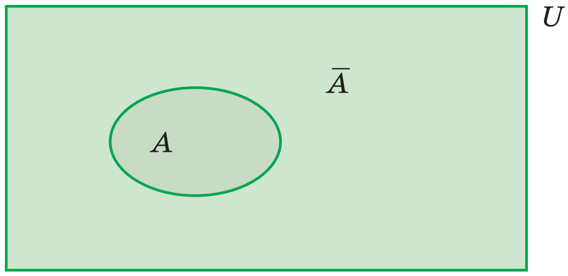


Рис. 3.

Событие: капля дождя падает на клумбу *A*. Противоположное событие: капля дождя падает вне клумбы, хотя и на газон.

Понятие ***равновозможных*** и ***неравновозможных*** событий может быть проиллюстрировано рисунком 4. События *A* и *B* равновозможны, поскольку соответствующие фигуры имеют равные площади, хотя и расположены в разных частях объемлющей фигуры *U*. События *A* и *C* не равновозможны, поскольку соответствующие фигуры имеют разные площади. Событие *C* более вероятно, чем событие *A*.

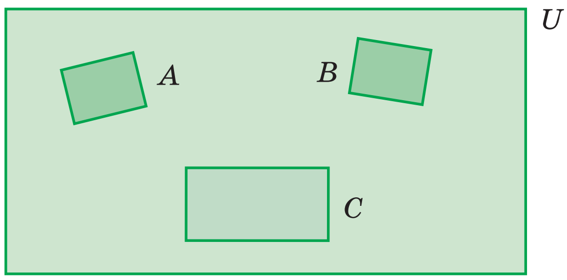


Рис. 4.

Понятие ***вероятности события*** и ***условной вероятности*** события могут быть проиллюстрированы рисунком 5 и парой соответствующих формул. При этом по первой формуле $P(A)=\frac{S_A}{S_U}$ вычисляется вероятность попадания точки на фигуру *A*, а по второй формуле $P_A(B)=\frac{S_{A\cap B}}{S_A}$ – вероятность попадания точки на фигуру *B* при условии, что точка уже попала на фигуру *A*.

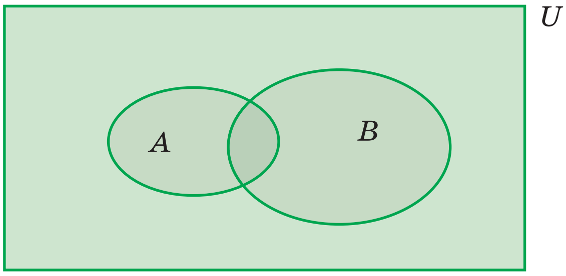


Рис. 5.

Понятия ***совместных событий*** и ***несовместных событий*** могут быть проиллюстрированы рисунком 6. События A и B несовместны, события A и C совместны.

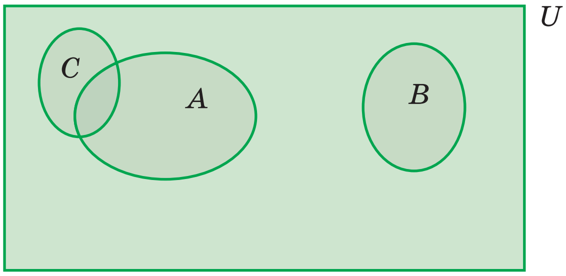


Рис. 6.

Интересную визуализацию имеет понятие ***независимых событий.*** Независимость событий A и B означает, что $P(AB) = P(A)P(B)$. В геометрических терминах это означает, что $\frac{S_{A\cap B}}{S_U} = \frac{S_A}{S_U}\frac{S_B}{S_U}$. Если $S_U = 1$, то получаем равенство $S_{A\cap B} = S_A S_B$. Оно показывает, что при данной форме и размерах фигур A и B причиной зависимости или независимости событий является взаимное расположение фигур: они должны пересекаться, причем пересечение не может быть ни слишком большим, ни слишком маленьким. Еще более специализируем ситуацию: пусть U является квадратом со стороной 1, а фигуры A и B – прямоугольниками со сторонами 1 и 0,5. Советуем нарисовать такое взаимное расположение прямоугольников, при котором события независимы; в геометрических терминах это означает, что площадь пересечения прямоугольников должна быть равна 0,25.

Теорема о вероятности суммы событий иллюстрируется рисунком 7 и таким рассуждением: $S_{A\cup B} = S_A + S_B - S_{A\cap B} \Leftrightarrow \frac{S_{A\cup B}}{S_U} = \frac{S_A}{S_U} + \frac{S_B}{S_U} - \frac{S_{A\cap B}}{S_U} \Leftrightarrow P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Если события несовместны, то $S_{A\cap B} = 0$, и $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

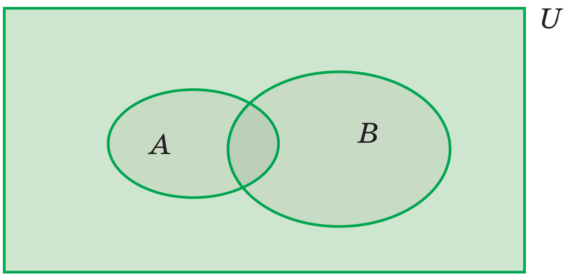


Рис. 7.

Теорема о вероятности произведения событий иллюстрируется также рисунком 7, однако сопровождается другим рассуждением:

$$P(AB)=\frac{S_{A\cap B}}{S_U}=\frac{S_A}{S_U}\cdot\frac{S_{A\cap B}}{S_A}=P(A)P_A(B).$$

Теорема о полной вероятности события иллюстрируется рисунком 8. Здесь рассматривается случай двух гипотез G и H и события A, которое может наступать как при выполнении одной из них, так и при выполнении другой.

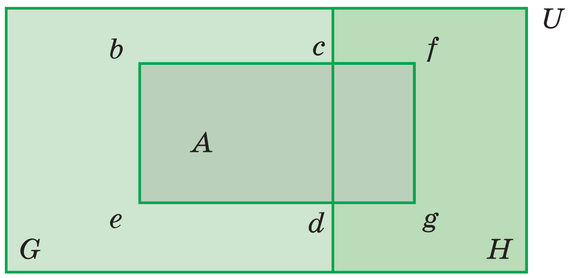


Рис. 8.

Теорема доказывается следующим образом. Очевидное геометрическое равенство $S_A=S_{bcde}+S_{cfgd}$ поделим на S_U и получим равенство:

$$\frac{S_A}{S_U}=\frac{S_{bcde}}{S_U}+\frac{S_{cfgd}}{S_U}.$$

Первое слагаемое в правой части умножим и разделим на S_G, а второе – на S_H. Получим, что $\frac{S_A}{S_U}=\frac{S_G}{S_U}\cdot\frac{S_{bcde}}{S_G}+\frac{S_H}{S_U}\cdot\frac{S_{cfgd}}{S_H}$. Если теперь к каждой дроби применить либо определение вероятности события, либо условной вероятности события, то получим равенство $P(A) = P(G)P_G(A) + P(H)P_H(A)$.

Теорема Байеса о вероятности гипотезы также иллюстрируется рисунком 8, однако имеет другое доказательство:

$$P_A(G)=\frac{S_{bcde}}{S_A}=\frac{S_{bcde}/S_U}{S_A/S_U}=\frac{(S_G/S_U)(S_{bcde}/S_G)}{P(A)}=\frac{P(G)P_G(A)}{P(A)}.$$

Педагогическая рефлексия. Как и в предыдущем параграфе, мы построили *базовый пример*, связанный с геометрической фигурой, вложенной в другую фигуру. Оказалось, что с его помощью достаточно эффективно иллюстрируются многие понятия теории вероятностей и доказательства многих теорем. Для учителя важно, что восприятие математического материала осуществляется не только с помощью логики, но и с помощью органов чувств, в данном случае зрения. При этом именно зрительный образ объекта подсказывает логику доказательства, а это, по нашему мнению, способствует лучшему усвоению изучаемого материала. В дальнейшем будет предложен другой способ визуализации понятий и фактов стохастики, а именно, визуализация с помощью графов[4].

---

[4] См.: *Ястребов А.В. и др.* Очерки по методике преподавания стохастики (Часть 2) // Полином. 2010. № 1. – *Прим. ред.*

§ 3. Статистическое определение вероятности

Классическое определение вероятности события выражается формулой $P(A)=\dfrac{k}{n}$ (см. § 1 настоящей главы). При этом мы делаем достаточно умозрительные допущения о том, что все мыслимые элементарные исходы испытания равновозможны и несовместны. Кроме того, мы говорим об исходах испытания, которые *благоприятствуют* наступлению события. Слово «благоприятствуют» вряд ли можно трактовать как точный термин, потому что мы употребляем его в житейской речи практически в том же смысле, что и в определении. Действительно, тепло и дождь благоприятствуют хорошему урожаю, а мягкий климат благоприятствует хорошему здоровью. Однако при изучении событий можно поступать иначе, а именно, проводить *реальные эксперименты* при одинаковых условиях и наблюдать за наступлением изучаемого события. При достаточно подробном обсуждении реальных экспериментов мы сможем ввести третье, статистическое, определение вероятности события. Дадим некоторые предварительные определения и рассмотрим примеры, иллюстрирующие их.

Пусть одно и то же испытание проводится при неизменных условиях n раз. ***Абсолютной частотой*** события A в данном эксперименте называется число k появлений этого события. ***Относительной частотой*** события A называется отношение числа появлений этого события к общему числу проведенных испытаний: $P^*(A)=\dfrac{k}{n}$.

Рассмотрим некоторые примеры тренировочного характера.

Пример 1. Провели 50 подбрасываний игрального кубика. Результат эксперимента занесли в таблицу, нашли абсолютную и относительную частоты каждого исхода.

Исходы	Подсчет повторений	Абсолютная частота	Относительная частота
1	|||||||||	9	0,18
2	||||||	6	0,12
3	||||||||	8	0,16
4	|||||||||||	11	0,22
5	|||||||||	9	0,18
6	|||||||	7	0,14
Всего		50	1

Полученная таблица обладает некоторыми замечательными свойствами:

• сумма абсолютных частот равна 50, то есть числу испытаний;

• сумма относительных частот равна 1.

Пример 2. По результатам эксперимента из примера 1 можно найти абсолютную и относительную частоты случайных событий. Пусть, например,

A = «на кубике выпало чётное число очков»;

B = «на кубике выпало нечётное число очков»;

C = «на кубике выпало число очков, большее трёх».

Заметим, что в данном случае одно событие порождено несколькими исходами испытания. Мы вычисляем частоту не взаимоисключающих исходов, а сложных случайных событий. Некоторые из них могут происходить одновременно, например, события A и C. В силу этого сумма абсолютных частот не равна числу экспериментов, а сумма относительных частот больше 1, как показано в следующей таблице.

Событие	Абсолютная частота	Относительная частота
A	$6 + 11 + 7 = 24$	$24/50 = 0{,}48$
B	26	0,52
C	27	0,54

Рассмотрим теперь два примера, связанных с большим количеством испытаний.

Пример 3. Математики Ж. Бюффон и К. Пирсон провели многократные опыты с бросанием монеты. Их результаты приведены в таблице.

Испытатель	Число бросаний	Число выпадений герба	Относительная частота выпадения герба
Бюффон	4040	2048	0,5085
Пирсон	12000	6019	0,5046
Пирсон	24000	12012	0,5005

Обращает на себя внимание несколько обстоятельств. Во-первых, во всех трёх экспериментах число испытаний было весьма велико. Во-вторых, во всех трёх независимых экспериментах относительные частоты весьма мало отличаются друг от друга. В-третьих, относительные частоты весьма мало отличаются от 0,5, то есть от того значения вероятности, которое получается согласно классическому определению вероятности. Наконец, в-четвёртых, при росте числа испытаний в эксперименте отличие относительной частоты от классического значения вероятности уменьшается. Так было обнаружено явление, которое получило специальное название – ***устойчивость относительной частоты***. Оно состоит в следующем: *в различных экспериментах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше проведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа*.

Важно отметить, что явление статистической устойчивости соединяет *реально проводимые* испытания с *теоретическими моделями* испытаний.

Пример 4. Статистические исследования большого количества литературных текстов показали, что относительные частоты появления той или иной буквы или пробела между словами стремятся при увеличении объема текста к некоторым определенным константам. Таблицы, в которых собраны буквы того или иного языка и соответствующие константы, называют частотными таблицами языка.

Подобно языку в целом, у каждого автора есть своя частотная таблица использования букв, слов, специфических литературных оборотов и т.п. По этой частотной таблице можно определить автора примерно так же точно, как по отпечаткам пальцев. Например, было много споров об авторстве «Тихого Дона». Многие считали, что в возрасте 23 лет М.А. Шолохов не мог написать такую глубокую и поистине великую книгу. Особенно жаркими были споры в 1965 г., в момент присуждения М.А. Шолохову Нобелевской премии в области литературы. Статистический анализ романа и тех текстов, которые были заведомо написаны М.А. Шолоховым, подтвердил гипотезу о его авторстве «Тихого Дона». Здесь вновь видим то же самое явление – устойчивость частоты.

Решим теперь задачу, которая одновременно является и тренировочной, и практической.

Задача 1. Алёша и Серёжа занимаются стрелковым спортом. Как узнать, кто из них лучший стрелок? Как количественно оценить качество их стрельбы?

Решение. Для обоих стрелков устроили эксперимент, который состоял в следующем. Каждый из них сделал несколько серий выстрелов различной величины: из 10 выстрелов, из 20 выстрелов, из 30 выстрелов, ..., из 100 выстрелов. В каждом случае считали число попаданий и вычисляли относительную частоту попаданий. Результаты свели в таблицу:

Число выстрелов	Алёша		Серёжа	
	Число попаданий	Относительная частота	Число попаданий	Относительная частота
10	7	0,7	5	0,4
20	17	0,85	5	0,25
30	26	0,867	8	0,267
40	33	0,825	12	0,3
50	41	0,82	15	0,3
60	49	0,817	19	0,317
70	56	0,8	22	0,388
80	65	0,813	25	0,275
90	72	0,8	28	0,311
100	81	0,81	31	0,31

Видно, что у обоих стрелков отношение числа попаданий к числу произведённых выстрелов меняется от серии к серии, однако для каждого стрелка колеблется около определенного числа: у Алёши – около 0,8, а у Серёжи – около 0,3. Из всего сказанного можно заключить, что Алёша лучший стрелок, чем Серёжа. При этом числа 0,8 и 0,3 можно считать количественными характеристиками качества стрельбы Алёши и Серёжи соответственно. Важно теперь придать этим характеристикам точный математический смысл.

Вероятностью события называется предельное значение относительной частоты этого события в бесконечной серии испытаний.

Это определение можно выразить иначе: вероятность события – это то число, около которого колеблется относительная частота этого события при увеличении количества испытаний. Это же определение можно выразить в виде приближённого равенства:

$$P(A) \approx P^*(A) = \frac{k}{n}. \qquad (1)$$

Именно это равенство будет использоваться в дальнейшем при решении задач.

Педагогическая рефлексия. Перед введением статистического определения учащимся можно предложить проделать лабораторную работу, состоящую в подбрасывании монеты или кубика. Большая ценность её проведения в том, что учащиеся могут самостоятельно обнаружить явление статистической устойчивости. В то же время достаточно сложно организовать на уроке такую лабораторную работу, так что вопрос о её целесообразности должен решаться отдельно в каждом конкретном случае с учётом условий педагогического процесса. В случае проведения лабораторной работы следует обратить внимание учащихся на то, что *на практике* статистические испытания и наблюдения являются основным способом оценки вероятности событий.

Систематизация и закрепление материала. Мы познакомились с тремя определениями вероятности случайного события: классическим, геометрическим, статистическим. При этом только два первых определения являются чисто математическими, поскольку позволяют точно определить вероятность события в рамках математической модели, не обращаясь к опыту. В свою очередь, статистическое определение наполняет первые два определения реальным смыслом: именно к указанным в них опытным величинам будет стремиться частота в статистических экспериментах. Важно помнить, что *каждое из определений имеет свою область применения*. Классическое определение пригодно только для тех испытаний, которые имеют конечное количество элементарных исходов, причем несовместных и равновозможных (достаточно редкое явление в повседневной жизни). Геометрическое определение применяется в случае, если число элементарных исходов бесконечно. Статистическое определение позволяет получить оценки вероятностей событий на основе проведения достаточно больших серий экспериментов.

Решим две задачи, которые связывают классическое и статистическое определение вероятности случайного события.

Задача 2. Из озера выловили 86 рыб, которых пометили и отпустили обратно в озеро. Через неделю произвели повторный отлов. На этот раз поймали 78 рыб, среди которых оказалось 6 помеченных. Сколько приблизительно рыб живёт в озере?

Решение. Пусть в озере x рыб. Пусть событие A состоит в том, что поймана помеченная рыба. Согласно классическому определению вероятности $P(A) = \frac{86}{x}$. При статистическом подходе относительная частота события A вычисляется по формуле $P^*(A) = \frac{6}{78}$. В силу формулы (1) получаем приближённое равенство $\frac{86}{x} \approx \frac{6}{78}$, откуда $x \approx \frac{86 \cdot 78}{6} = 1118$.

Задача 3. Из озера выловили 86 рыб, которых пометили и отпустили обратно в озеро. Через неделю произвели повторный отлов – на этот раз поймали 78 рыб, среди которых не оказалось ни одной помеченной! Что можно сказать о количестве рыб, живущих в озере?

Решение. Решим задачу, немного изменив условие. Пусть среди пойманных во второй раз рыб была *одна* помеченная. Рассуждая так же, как при решении задачи 2, получим приближённое равенство $\frac{86}{x} \approx \frac{1}{78}$, откуда $x \approx \frac{86 \cdot 78}{1} = 6708$. По условию задачи не попалось ни одной помеченной рыбы. Значит, в озере живет более 6708 рыб.

Отметим, что в обеих задачах речь шла о *приближённых значениях* или об *оценках* количества рыб, а вовсе не о точном количестве рыб.

Решим теперь задачу, связывающую геометрическое и статистическое определение вероятности случайного события.

Задача 4. За один летний месяц на прямоугольный газон длиной 5 м и шириной 4 м упало 30 млн. капель дождя. Сколько капель упало на круглую клумбу радиуса 1 м, расположенную на этом газоне? Какого размера должен быть парк, содержащий этот газон, чтобы за тот же месяц на парк упало 30 млрд. капель дождя?

Решение. 1) Введём следующие обозначения: S – площадь газона; S' – площадь клумбы; $\bar{S}$ – площадь парка; n – количество капель, упавших на газон; n' – количество капель, упавших на клумбу; $\bar{n}$ – количество капель, упавших на парк; A = «падение капли на газон»; A' = «падение капли на клумбу».

2) По условию $S = 4 \cdot 5 = 20$ (м^2); $S' = \pi \cdot 1^2 = \pi$ (м^2); n = 30 млн. = $3 \cdot 10^7$; $\bar{n} = 30$ млрд. = $3 \cdot 10^{10}$.

3) Согласно геометрическому определению вероятности $P(A') = \frac{S'}{S}$. При статистическом подходе относительная частота события A' вычисляется по формуле $P^*(A') = \frac{n'}{n}$. В силу формулы (1) получаем приближенное равенство $\frac{S'}{S} \approx \frac{n'}{n}$. Отсюда $n' \approx \frac{nS'}{S}$. Подставляя в правую часть значения величин, получаем, что количество капель, упавших на клумбу, равно $n' \approx \frac{\pi \cdot 3 \cdot 10^7}{20} \approx 4712389$.

4) Рассуждая так же, как в предыдущем пункте, получим, что количества капель, упавших на газон и упавших на парк, пропорциональны их площадям: $\frac{n}{\bar{n}} \approx \frac{S}{\bar{S}}$. Отсюда $\bar{S} \approx \frac{S\bar{n}}{n}$. Подставляя в правую часть значения величин, получаем, что площадь парка равна $\bar{S} \approx \frac{20 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^7} = 20000$ (м^2). Если парк является квадратом, то его сторона равна $a = \sqrt{\bar{S}} = \sqrt{20000} \approx 141$ (м).

Замечание 1. Очевидно, что данная задача носит учебный характер, поскольку содержит очень «удобные» данные: 30 млн. и 30 млрд. капель. Тем не менее, они не очень далеки от реальности. Так, в Ярославской области среднегодовая норма осадков равна 600 мм. На летний месяц вполне может приходиться 50 мм = =0,05 м осадков, то есть объём воды, выпавшей на 1 м^2 поверхности земли, равен 0,05 м^3. Следовательно, объем воды V, выпавшей на изучаемый газон, равен V = = 1 м^3. Считая, что среднестатистическая капля имеет диаметр d = 4 мм = $4 \cdot 10^{-3}$ м (реальные данные), мы можем вычислить количество капель, упавших на газон. Действительно, $V=\frac{\pi d^3}{6}n$, откуда $n=\frac{6V}{\pi d^3}$. Подставляя имеющиеся данные, получим, что число капель, упавших на газон, равно $n=\frac{6\cdot 1}{\pi\cdot 64\cdot 10^{-9}}=\frac{3\cdot 10^9}{32\pi}\approx 29841552$. Таким образом, отличие условий задачи от реальных данных составляет $\frac{30000000-29841552}{29841552}\cdot 100\%\approx 0{,}5\%$. Рекомендуем повторно решить задачу, используя количество капель $n = 29841552$.

Замечание 2. Проводя расчёты, мы пользовались инженерным калькулятором, который дает значение числа π с точностью до 32 десятичных знаков. Если использовать традиционное приближение $\pi\approx 3{,}14$, то результат будет несколько отличаться от приведённого выше. Рекомендуем выяснить величину этого отличия, решив задачу еще раз с более грубым (или более точным) приближением. Таким образом, данная задача относится к числу тех немногих задач школьного курса математики, в которых целесообразно использовать значение числа π со многими десятичными знаками.

(*Продолжение следует.*)

Вернуться к содержанию

«Живая» доска Гальтона

Андрей Иванович ЩЕТНИКОВ
зам. директора Центра образовательных проектов «Сигма»,
руководитель проекта «Школа Пифагора», г. Новосибирск
schetnikov@ngs.ru

1. Устройство для демонстрации нормального статистического распределения, известное под названием доски Гальтона, схематически изображено на рис. 1. Шарик падает в воронку первого уровня и, ударившись о штифт, отскакивает вправо либо влево; затем он попадает в одну из двух воронок второго уровня, в одну из трех воронок третьего уровня, и т.д. При этом на каждом штифте в идеализированной модели вероятности отскока вправо и влево равны между собой.

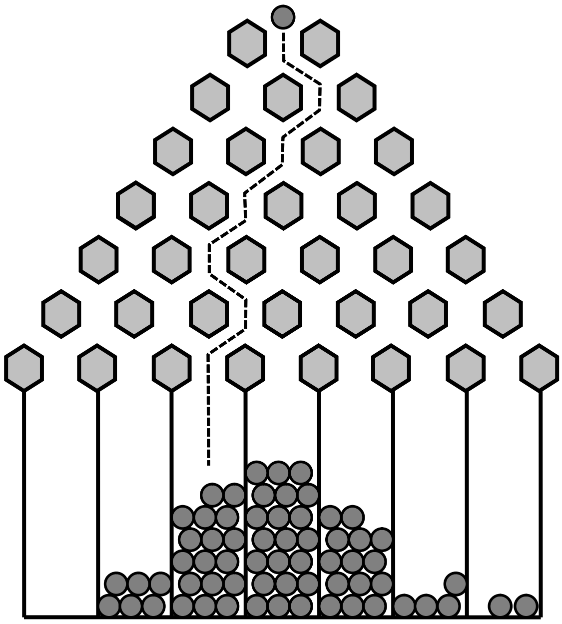


Рис. 1.

Занумеруем карманы нижнего уровня целыми числами от 0 до n. Вероятность попадания шарика в карман с номером k равна

$$p(k) = \frac{1}{2^n} C_n^k = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где C_n^k — биномиальный коэффициент, представляющий в нашем случае число различных путей, которыми шарик может попасть в k-й карман.

Пропуская через доску Гальтона значительное количество шариков один за другим, можно наблюдать за тем, как их распределение по карманам постепенно становится всё более близким к математически ожидаемому биномиальному распределению. Эти наблюдения позволяют почувствовать самый характер вероятностно-статистических закономерностей.

2. На одной из наших летних школ мы проводили погружение «Вероятностные и статистические закономерности», для которого нам потребовалась доска Гальтона, а времени и материалов для ее изготовления у нас не было. Выход был найден в том,

чтобы провести опыт с доской Гальтона в форме *полигона* — игровой процедуры, в которой задействованы все участники погружения. Эта процедура, в которой участвовало более 30 человек, оказалась весьма зрелищной, и с тех пор мы повторяли её ещё несколько раз.

На асфальте расчерчивается площадка, изображённая на рис. 2; сторона каждого квадратного поля составляет около 1,5 м. На входе в квадрат первого уровня ставится коробка с 512 шишками; на выходе из каждого квадрата последнего уровня стоят обрезанные пластиковые бутылки для сбора шишек (для двух центральных квадратов нужно приготовить 5–6 бутылок).

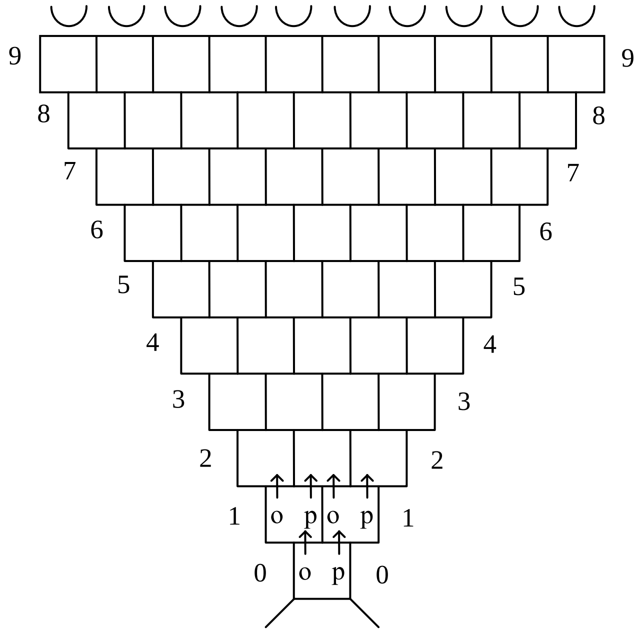


Рис. 2.

Каждый участник полигона держит в руках монетку. Перед проведением полигона нужно показать, как подбрасывать монетку щелчком с ногтя, чтобы результат каждого следующего броска оказался непредсказуемым. Участники по очереди берут из коробки по одной шишке, заходят на площадку первого уровня и бросают монетку. Если она выпадает орлом, участник переходит на второй уровень в левый квадрат; если решеткой — в правый квадрат. На втором уровне монетка бросается снова, и т.д. Достигнув последнего уровня, участник кладет свою шишку в стоящую перед ним тару и возвращается в очередь. Опыт показывает, что на «обработку» 512 шишек требуется чуть больше получаса.

По завершении процесса хотя бы одно из крайних полей с заметной вероятностью окажется не пустым. На этот факт следует обратить особое внимание участников. Крайнего поля можно достичь, только выкинув монетку одной стороной 9 раз подряд. Такая серия бросков выглядит крайне маловероятной; однако большое число испытаний делает этот маловероятный исход вполне наблюдаемым.

После того, как опыт с доской Гальтона проведен в форме полигона, отдельные школьники могут заняться воплощением этого же устройства «в железе» или написанием компьютерной программы, имитирующей его работу на экране дисплея.

Вернуться к содержанию

Алексей Иванович СГИБНЕВ
учитель математики школы-интерната «Интеллектуал» г. Москвы
sgibnev@mccme.ru

Идея

Я учился в обычной школе, и из всех уроков математики мне больше всего запомнился один, на котором учительница при объяснении ошиблась, и класс вместе с ней искал ошибку.

Традиционный урок математики устроен *монологически*: ученику выдают готовый образец: определение, теорему, метод решения – а затем он должен, применяя их, решить задачу (произнести ответный монолог). Этому соответствует очень сильная монологическая традиция математических текстов, которые от «Начал» Евклида до наших дней пишут так: *аксиома – определение – формулировка теоремы – доказательство*. Преимущества этой схемы ясны: краткость и объективность. Но есть и недостатки:

– немотивированность (почему надо доказывать то, а не это);

– непонятно, как додуматься до утверждения или идеи;

– «Я так думать не умею, значит, я не математик», – считает ребёнок, видя, что его мысль не движется по этой схеме в четыре такта.

Между тем математики тоже люди и думают совсем не так, как пишут.

Это можно показать *диалогическим* ведением урока. Приведу пример из своей практики. 8 класс, тема «Средняя линия треугольника». Рисую треугольник со средней линией и прошу дать словесное определение. «Это линия, проходящая через середины сторон». Рисую контрпример. «Это линия, соединяющая середины сторон». Опять контрпример (я или кто-то из детей). «Это отрезок, соединяющий середины сторон». Ура! Открыли тетради, записали. Итак, потрачены 2–3 минуты, зато дети крепко запомнили определение и понимают, что в нём каждое слово важно. Дальше в похожем диалоге угадываем свойства средней линии и пытаемся их доказать. Сильный класс способен всё придумать сам (и даже просит: «Не рассказывайте, мы сами всё сделаем!»). Слабому классу приходится больше помогать, наводить, но в целом на диалог способны и они.

Что касается диалогических текстов по математике, то их наперечёт [1, 2, 3, 4]. Читать эти тексты очень интересно и очень непривычно – просто нет соответствующей традиции.

Сказанное можно проиллюстрировать опытом Кружка экспериментальной математики, который почти тридцать лет ведёт в Москве проф. Г.Б. Шабат. Его подход радикален: «Я детям вопросов не задаю. Я им показываю интересную математическую конструкцию, а они начинают с ней экспериментировать, искать её свойства и сами ставят вопросы». То есть нет чёткой монологической постановки задачи, но на каждом этапе работы идёт обсуждение с ребёнком, диалог. Замечательно, что за десятилетия работы кружка было всего несколько случаев, когда ребёнок совсем не справлялся с задачей.

Подведём итог. Традиционная монологическая *форма* занятий математикой отталкивает некоторых детей, вполне способных усвоить *содержание* этих занятий. Чтобы не потерять этих детей, нужно внедрять диалогические формы ведения урока и (что более трудно) создавать традицию диалогических текстов по математике.

Сейчас много говорят о гуманитаризации школьной программы. Я думаю, что настоящая гуманитаризация математики не в том, чтобы её упростить и разукрасить побрякушками, а в том, чтобы показать её человеческую сущность. А для этого надо на уроках математики не только диктовать теоремы, но и разговаривать с учениками.

Практика: примеры диалогов

В качестве приложения приведу примеры диалогов, имевших место действительности. Имена и реплики могли измениться лишь в силу погрешностей памяти автора и особенностей жанра.

9 класс. Формулы площади круга

Учитель. Нарисованы две концентрические окружности. Сколько измерений линейкой нужно сделать, чтобы найти площадь кольца между ними?

Дети. Два! Радиусы окружностей R и r.

Учитель. А с одним измерением получится?

Никита. Надо измерить «толщину» кольца.

Слава. Нет. Может быть кольцо с той же толщиной, но совсем с другой площадью (*рисует на доске*).

Илья. Наверно, надо провести хорду l большой окружности, касающуюся малой.

Аким. Ну да! $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R-r)(R+r) = \pi\left(\frac{l}{2}\right)^2$.

Когда ученики привыкают к такому стилю урока, случаются интересные диалоги, не запланированные учителем.

7 класс. Делимость

Учитель. Нужно доказать, что сумма k нечётных подряд идущих чисел делится на k. (*Учитель предполагал решение через остатки, но вышло иначе.*)

Дима. Очень просто: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$, что делится на k.

Учитель. Все ли согласны?

Аня. Но ведь Дима начал с 1. А в задаче можно начать с любого нечётного числа.

Ваня. Тогда к каждому слагаемому Диминой суммы добавится одно и то же число n. Значит, сумма увеличится на kn, а эта величина делится на k.

Учитель. Тем самым новая сумма тоже делится на k. Обратите внимание, что мы сначала решили задачу для простого частного случая, а потом обобщили.

7 класс. Окружность (*Вёл урок и записал диалог Д.Э. Шноль.*)

Учитель. Существует три названия отрезков, связанных с окружностью. Два из них вы наверняка знаете.

Дети (*кричат одновременно*). Конечно: радиус и диаметр!

Учитель. А что такое диаметр?

Миша. Это два радиуса.

Учитель. Так, что ли? (*Рисует два радиуса под острым углом.*)

Миша. Нет. Диаметр – это два радиуса, лежащие на одной прямой.

Учитель. По смыслу верно, но по формулировке коряво. Определять диаметр, как отрезок, состоящий из двух других, не очень хорошо. Давайте определим диаметр как-нибудь по-другому.

Пауза.

Юля. А какой ещё третий отрезок бывает в окружности, Вы говорили?

Учитель. Да, а какой ещё третий?

Дима. Я знаю: хорда – отрезок, соединяющий две точки окружности.

Юля. Любой отрезок?

Дима. Любой.

Юля. Тогда диаметр – это тоже хорда.

Дима. Конечно.

Юля. Даю определение: диаметром называется хорда, проходящая через центр окружности.

Учитель. Отлично. Записываем в тетради.

Пока записывают определение.

Оскар. А мы умеем доказывать, что хорда всегда меньше диаметра?

Учитель. Отличный вопрос! Только уточним: всегда не больше диаметра. Подумайте полминуты, потом обсудим, как это доказать.

Через полминуты.

Ваня. Давайте сначала возьмём диаметр и хорду с общей точкой.

(Ученик имеет в виду – с общей точкой на окружности, это понятно по контексту, и учитель не придирается к формулировке.)

Учитель. Разумно (*рисует на доске*).

Ваня. Получим треугольник.

Учитель. Хорошо, дальше.

Ваня. Дальше пока не знаю.

Учитель. Думайте, нужно ещё что-то провести.

(*Напоминание: теорему о вписанном угле ученики не знают, а неравенство треугольника и вид треугольника, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, – знают.*)

Пауза.

Юля и Ваня (*одновременно*). Проведём медиану к диаметру, это радиус, он равен половине диаметра, треугольник прямоугольный, значит, гипотенуза – наибольшая сторона.

Учитель. Всё? Или ещё что-то осталось?

Ваня. Нет, нужно рассмотреть общий случай, когда у диаметра и хорды нет общей точки (на окружности).

Дима. Элементарно: все диаметры окружности равны, значит, проведём дополнительный диаметр и сведем к предыдущему случаю.

Учитель. Здорово. Спасибо всем и особенно Оскару за содержательный вопрос.

6 класс. Рациональные и иррациональные числа

(*В учебнике Никольского «Арифметика, 6» в дополнительном пункте дано обоснование того, что каждой точке на действительной оси соответствует координата – либо рациональная, либо иррациональная*).

Учитель. Нанесём на ось «зарубки» с целыми координатами. Если наша точка попала на такую зарубку, то, значит, её координата целая. Если же она попала между двумя зарубками, то мы можем определить координату с избытком и с недостатком с точностью до 1. Что же делать, если мы хотим определить её точнее?

Дети. Поделить отрезок между этими двумя зарубками на 10 равных частей.

Учитель. Если точка оказалась на зарубке, получим дробь со знаменателем 10. А если она опять попала между двумя зарубками?

Дети. Поделим отрезок ещё на 10 частей!

Учитель. И так далее. Возможны два исхода. Либо точка на каком-то шаге попадёт на зарубку, и тогда координата запишется конечной дробью. Либо точка на каждом шаге попадает между зарубок, и тогда координата будет записываться бесконечной дробью.

На этом учитель предполагал завершить обсуждение, но ученики только раскачались:

Данила. А как понять – кончится процесс когда-нибудь или нет? (*Это вопрос о соотнесении теоретической конструкции и её практического осуществления.*)

Олег. Ну, если точка нарисована на доске – она обязательно на каком-то шаге попадёт на зарубку. (*Фактически Олег понял, что для практики всегда достаточно рациональных величин.*)

Данила. А почему мы делим отрезок именно на 10 частей?

Витя. У нас же десятичная система счисления.

Илья. Так удобнее записывать измерения.

Данила. Но ведь некоторые координаты при делении на другое число частей окажутся конечными дробями.

Учитель. Например, 0,333... = 1/3, поэтому при делении на 10 частей процесс бесконечен, а при делении на 3 части всё остановится через один шаг.

Глеб. Но если при делении на 10 частей координата иррациональна, то и при делении на другое число частей – тоже. (*Глеб выдвинул – верную! – гипотезу, которую шестиклассники вряд ли смогут доказать, поэтому учитель не стал развивать тему.*)

Заключение

Диалогическое ведение урока требует от учителя внимания к мыслям учеников, быстрой реакции, готовности отступить от намеченного плана. Если школьник пытается высказать сложную мысль, надо ему помочь её сформулировать, подсказать хороший пример и т.д. Когда мысль высказана, полезно её обсудить. Если идея неверна, надо дать шанс детям это увидеть самим. Не стоит ученика сильно критиковать (и уж тем более ставить плохие оценки!), всегда надо подчёркивать рациональное зерно в его идее.

Ясно, что при таком подходе время урока гораздо труднее поддаётся планированию, чем при монологической форме. Зато случаются неожиданные открытия, которые надолго запоминаются и могут изменить отношение детей к математике.

***

С диалогическими материалами по школьной математике можно познакомиться на сайте http://int-sch.ru/math. Буду благодарен за любые обсуждения и материалы.

Литература

1. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: ИЛ, 1957; УРСС, 2009.

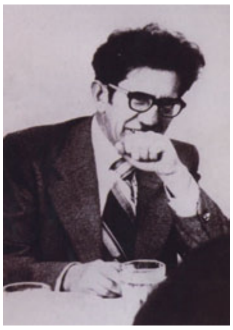
2. *Лакатос И.* Доказательства и опровержения. – М.: Наука, 1967.

3. *Звонкин А.К.* Малыши и математика. Домашний кружок для дошкольников. – М.: МЦМНО; МИОО, 2006.

4. *Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В.* Ленинградские математические кружки. – Киров: АСА, 1994. Тема «Математическая индукция» (автор И.С. Рубанов).

Вернуться к содержанию

Из записок старого учителя[1]



Арон Рувимович МАЙЗЕЛИС (1921–2005)
учитель математики

Много я узнал от учителей своих.
Ещё больше от сверстников.
Но более всего от учеников.
Старинная мудрость
из священных книг

ВВЕДЕНИЕ

За почти пятидесятилетний период моей работы в школе менялись программы, менялись учебники, менялась официальная и неофициальная точка зрения на цели обучения. Менялись и ученики. Мне пришлось работать и в «обычной» школе (других тогда просто не существовало), и в Нахимовском училище, и в интернате, созданном дабы осуществлять идеи Н.С. Хрущева о необходимости перехода всех учеников на общественное воспитание. В такие интернаты многие школы старались отправить самых «солёных учеников» (выражение одного «солёного»). Несколько лет работал в школе с различными «трудовыми уклонами» (швеи, слесари, токари, реставраторы-эрмитажники и физики-лаборанты). Последние 27 лет работал в физико-математических 10–11-х (9–10-х) классах.

Я не буду пытаться, как иногда говорят, «обобщать опыт», я всего лишь хочу вспомнить несколько эпизодов, оказавшихся для меня как учителя важными и рассказать о некоторых своих приемах. Читая дальнейшее, надо понимать что, во-первых, опыт накопился почти за полвека работы; во-вторых, далеко не на каждом уроке делаются «открытия»; в-третьих, не в каждом классе и не всё удается каждый раз, многое зависит от «ситуации»; в-четвертых, но не в-последних, конечно, надо понимать, что большинство уроков – рабочие. Искусство состоит в том, чтобы соблюдать чувство меры. Признаюсь, у меня это не всегда получалось.

ОПЫТ

Математика, как известно, наука скучная. Поэтому ещё Паскаль предлагал не упускать случая сделать её интересной. Разумеется, надо сперва разобраться в материале. Но этого очень и очень мало. Сколько бы учитель ни работал, он должен искать пути к разуму и к сердцу, именно к сердцу ученика.

[1] Текст с небольшими изменениями перепечатан из книги: Памяти А.Р. Майзелиса / Сост. А.П. Карп. – СПб.: СМИО-Пресс, 2007.

Открытие с перепугу

Идёт урок в 9-м классе. Я – молодой учитель. На уроке присутствует инспектор из Москвы. Я, правда, уже понял, что инспектора приходят и уходят, а ученики остаются. Поэтому, как обычно, вызвал трёх учеников – двух слабых и одного сильного. И, как обычно, они вытянули листочки с заданиями. Самый простой вопрос достался сильному, ответ которого я оставил напоследок. Он должен был рассказать признак параллельности прямой и плоскости. Но что это? Вместо знакомого доказательства (по Киселёву) всего две фразы: «Если бы прямая *AB* не была параллельна плоскости *P*, то она пересекала бы её в точке, не лежащей на *CD*. Но тогда она была бы скрещивающейся с ней, что противоречит условию».

До сих пор я не замечал такого простого доказательства. Время ещё было суровое, отход от стабильного пособия не поощрялся. Инспектор сперва не поняла доказательства. Я похвалил Мишу Альтшуллера, и он после урока признался, что доказательство он придумал с перепуга, так как не заглянул в учебник.

Первое открытие

Классу было дано практическое задание: показать на модели, что графики взаимно обратных функций синуса и арксинуса симметричны друг другу относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. А Женя Шумилкина кроме того, сделала модель и для арккосинуса, что требовало догадки: надо было разрезать второй лист бумаги там, где пересекаются графики прямой и обратной функций. Кстати сказать, впоследствии Женя Шумилкина не только стала кандидатом физ.-мат. наук, но, что более показательно, стала изобретателем-миллионером. Её изобретения в старых ценах давали больше миллиона экономии. Эти и другие доказательства своих учеников я потом встретил в позднее изданных пособиях для учителей и как «открытия» в журнале «Математика в школе».

Теорема Ерух

На уроках геометрии старшеклассники занимаются «открытием» доказательств теорем, делают это увлечённо, с большим интересом. Изучаем, например, теорему: «Плоскость, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую». Даю лишь некоторые пояснения. А доказать предлагаю самостоятельно. Отрадно, что размышляют, придумывают свои варианты не только сильные ученики, а почти все. Первой доказала теорему Вера Ерух. Довольно долго в этом классе говорили: «По теореме Ерух». Это игра? Да, есть тут элемент игры, но какой! Игры, развивающей понимание того, что знание, как утверждал Л.Н. Толстой, только тогда знание, когда оно приобретено усилиями своей мысли, а не памятью. Иногда ученики просят не разбирать доказательство теорем на уроках, а дать им ещё время дома подумать.

Архимед

При изучении правильных многогранников я дал понятие полуправильных многогранников и показал пару из них. Рассказал, что их открыл Архимед, что он не заметил существования ещё одного «архимедова» тела и что этот пробел установил только в тридцатых годах нашего века московский математик Ашкинузе. Предлагаю им «открыть» остальные тела и изготовить их модели. Честно говоря, я не очень рассчитывал на успех. Но ученики увлеклись многогранниками, а Сашу Сокольского, изготовившего больше всех моделей, они прозвали «Архимедом».

Меня эти и другие случаи научили многому. Во-первых, избавиться от излишней «добросовестности», свойственной учителям. Во-вторых, задавать на дом посильный материал, о котором в классе даже, может быть, не упоминалось. В-третьих, в классе больше доверять ученикам. Один методист написал однажды, что идеальным считает урок, в котором учитель не участвует. Шутя можно сказать, что учитель нужен для того, чтобы получать зарплату. «Случайные открытия свершают только подготовленные умы», – сказал Паскаль. Как же к ним готовить? Рецепта, увы, нет, а наблюдения, пожалуй, есть.

ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ

Известен учительский анекдот. Когда отчаявшись найти ученика, который бы её слушал, учительница обратилась к мальчику, смотревшему ей прямо в рот, он ничего не ответил. Учительница воскликнула: «Ты-то все время смотрел мне прямо в рот!». – «А я хотел сосчитать сколько у Вас золотых зубов!» Мы должны постараться, чтобы ученики меньше считали золотые зубы. Частично для этого надо прерывать объяснение и... Бог знает, что надо делать. Надо менять тактику.

Информационные листочки

Не сразу я додумался до них. В новом классе на одном из первых уроков показываю, как с помощью только ножа из обычной школьной тетради сделать маленькие листочки в четверть тетрадного листа и пакетик, в котором эти листочки хранятся. Всё обязательное домашнее задание в этот раз состоит только из изготовления этих листков с полями, которые должны быть положены в пакетик. Их я применяю для постоянной «обратной связи». На них ученик может задать вопрос, может указать на «липу» в доказательстве, которая была сделана умышленно, на случайную ошибку на доске, может объяснить, почему он не сделал уроки, может аннотировать ответ товарища, может сообщить о своей догадке – куда дальше ведёт объяснение. Это может быть или какое-то преобразование, или логический шаг, или чертеж, или продолжение мысли, или завершение доказательства, или «ответ», или указание неизвестного в составленном неравенстве (уравнении). Часто работа на листочках бывает обязательной.

СВЯЗЬ ТЕМ

Познавательная активность учеников возрастает, когда они не только ощущают рост своих знаний, но и представляют перспективу дальнейшего их применения, развития, их выход в жизнь, в науку. Очень важно, завершая тему, дать понять ученику, что это только начало пути, и, если возможно, показать дальнейшее его направление. Важно, чтобы ученик видел взаимосвязь отдельных тем и вопросов курса. Например, показываю использование разложения многочлена на множители для решения уравнений высших степеней в 7-м, а не в 10-м или даже в 11-м классе, и это разложение уже не кажется ненужным, трудным. А с каким увлечением те же семиклассники решают или хотя бы слушают решение задач с математической «живинкой»! Вот одна из них.

Известно, что сумма обратных величин каких-то трёх чисел равна обратной величине их суммы. Доказать, что этим же свойством обладают 1997-е степени этих чисел.

Упрощение и разложение на множители (!) приводят условие задачи к уравнению: $(a+b)(b+c)(c+a)=0$. Откуда по крайней мере два числа из данных противоположны друг другу, а значит, их 1997-е степени обладают тем же свойством. Тут задаю шутливый вопрос: «А если это “случилось” годом раньше или годом позже?» Все понимают, что весь «секрет» в нечётности числа 1997.

Тождественные преобразования, разложение на множители, нахождение корней уравнений, вычисления перестают быть самоцелью, становятся средством решения интересных задач.

ЛИРИЧЕСКИЕ ОТСТУПЛЕНИЯ

Интерес к предмету всё время должен подкрепляться свежей умственной пищей, тем, чего нет в учебнике или в программе. Например, изучая касание прямой и окружности, рассказываю о фигурах постоянной ширины. В базовой школе, тем более в гуманитарных и даже в математических классах с двухлетним обучением (10 и 11 классы), нет в программе ничего о геометрии Лобачевского. И надо видеть, с каким вниманием и интересом знакомятся ученики с основами геометрии Лобачевского, когда идёт разговор об аксиомах стереометрии.

Или, скажем, в задаче нужно доказать, что один из углов составляет треть какого-то данного угла. И возникает повод поведать историю знаменитой задачи о трисекции угла, неразрешимой с помощью циркуля и линейки. Я предложил ребятам самим попытаться сконструировать прибор для её решения движением. После летних каникул ученик 10-го класса Володя Чирин принёс трисектор собственной конструкции и собственного изготовления с довольно простой кинематической схемой.

Когда изучаем тела вращения, рассказываю о теореме для геодезических линий на поверхности вращения: «Произведение $r \cdot \sin\alpha$ постоянно (где r – радиус параллели и α – угол, который составляет геодезическая с меридианом)». Здесь я рассказываю о поведении геодезических (кроме образующих) на конусе. Каждая из них делает поворот в узкой части конуса и навсегда уходит в широкую часть. Поясняю, что так же поведёт себя шарик, кинутый в «перевёрнутый» конус. При этом я опираюсь на то, что ученики знают, что геодезические играют роль прямых в смысле первого закона Ньютона. Один из моих учеников принёс доказательство теоремы о геодезических. Это был Максим Скриганов. Правда, за всё время моей работы только один ученик «вздумал» доказать эту теорему.

ОБЪЯСНЕНИЕ НА ПАЛЬЦАХ

Стимулирует мышление объяснение «на пальцах». А потом ученик дома или в классе сам даст строгое доказательство. Трудность доказательства зависит от класса. «Ерундовых» теорем не бывает: одному легко, а для другого на грани его возможностей. И дело учителя – «угадать» второго ученика и похвалить его, и, разумеется, поставить 5. Что можно объяснить «на пальцах»? Если не всё, то многое. Следствия из теоремы косинусов. Сравнительная длина перпендикуляра и наклонных, свойства отрезков параллельных прямых, заключённых между параллельными плоскостями, свойства параллельного проектирования: сохранение параллельности и отношения длин отрезков, лежащих на параллельных прямых, свойства и признаки параллелограмма и многое другое.

МАЛЫМИ СРЕДСТВАМИ

Сильнейшее впечатление на ребят производят решения, в которых почти ничего не используется из изученного материала. Связь между угловыми коэффициентами перпендикулярных прямых обычно находят с помощью векторов или тригонометрии. А можно её увидеть с помощью теоремы о том, что произведение проекций катетов на гипотенузу равно квадрату опущенной на неё высоты.

Пусть прямые заданы на плоскости уравнениями $y = kx + a$; $y = mx + b$. Параметры a и b не влияют на наклон прямых. Рассмотрим прямые $y = kx$; $y = mx$: обе они проходят через начало координат O и, если они взаимно перпендикулярны, то одна из них проходит в I-й и III-й, а другая во II-й и IV-й четвертях. Пусть $x = 1$, тогда ордината соответствующей точки A на одной прямой $y = k$, а соответствующей точки B на другой прямой $y = m$, при этом $km < 0$. С другой стороны, $|km| = 1$ (рассмотрим прямоугольный треугольник OAB!), следовательно, $km = -1$ (рис. 1).

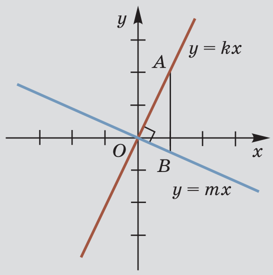


Рис. 1.

Ещё более поучительна следующая известная задача.

На обычной клетчатой бумаге выделяются рядом три клеточки-квадрата и проводятся диагонали AB, AC, AD. Требуется доказать, что сумма острых углов, образованных этими диагоналями с прямой BD, равна прямому углу (рис. 2).

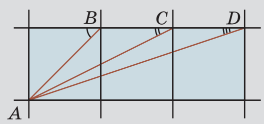


Рис. 2.

Эту задачу можно решить средствами седьмого (!) класса, средствами восьмого класса, используя подобие треугольников (двумя способами!), используя тригонометрическую теорему сложения (для синусов, для косинусов и лучше всего для тангенсов). Использование таблиц или калькуляторов даёт лишь приближённое значение искомой суммы, даёт, как сказал бы Пойя, правдоподобный результат.

РАЗНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ

Очень поучительна задача: «Построить отрезок с концами на данных прямых, делящийся в данной точке пополам». Здесь сознательно опущено условие, что эти прямые пересекаются. Боле того, не существенно, как расположены эти прямые. К пространственному случаю можно вернуться в 10-м классе. Вот некоторые способы её решения, когда данные прямые образуют угол. Пусть этот угол *AOB* и данная точка *M*.

1. На луче *OM* отложим отрезок *MC*, равный отрезку *OM*, и примем отрезок *OC* за диагональ параллелограмма; вторая диагональ даёт искомый отрезок. (Здесь и в дальнейшем я опускаю доказательство и исследование.)

2. Через точку *M* проводим прямые, параллельные *OA* и *OB*, они пересекут стороны данного угла в точках *L* и *N*. Затем проводим отрезок *LN* и прямую через *M*, параллельную *LN*; пусть она пересекает стороны данного угла в точках *C* и *D*, и мы получим искомый отрезок; как и прежде он назван *CD*.

3. Через точку *M* проводим прямую, параллельную *OB*, и пусть она пересекает *OA* в точке *L*. На луче *OA* отложим отрезок *LC*, равный отрезку *OL*, затем проведём прямую *CM*, и пусть она пересечёт *OB* в точке *D*. Отрезок *CD* – искомый.

4. На луче *OB* возьмём произвольно точку *K*, на луче *KM* отложим отрезок *MN*, равный *MK*. Через точку *N* проведём прямую, параллельную *OB*, она пересечёт *OA* в точке, скажем, *C*. Прямая *CM* пересечёт *OB* в точке *D*.

Здесь для простоты сравнения искомый отрезок назван одинаково *CD* во всех способах. Из этих способов самым простым кажется третий.

Теперь стоит хотя бы одну прямую заменить на окружность, как почти все способы решения задачи «рушатся». Полезно отдельно рассмотреть случай двух пересекающихся и касающихся окружностей. Но заметим, что в последнем приведённом способе решения исходной задачи прямая, параллельная прямой *OB*, симметрична ей относительно центра *M*. После этого можно рассмотреть центральную симметрию. Она позволит данные прямые заменить двумя произвольными окружностями или окружностью и параболой, или окружностью и произвольным контуром, например, известного озера. От этого решения прямая дорога к задаче, в которой середина отрезка заменена точкой, делящей отрезок сперва в отношении 1 : 2 (2 : 1), а потом и в любом отношении $m : n$, заданном отрезками.

В известной мере связана с этой *задача о падающей лестнице.* (Вообще, я сторонник того, чтобы задачам давать имена, и чем эти имена ближе к жизни, дальше от математики, тем лучше.)

Электрик плохо закрепил лестницу и, когда его ноги встали на среднюю ступеньку, лестница стала падать. (Все в классе ощущают ситуацию!) А теперь задача. Сперва на информационном листочке нарисовать направление удара ступеньки «по ногам»: куда в первое мгновение «поедет» середина лестницы? И тут многие, если не большинство, ответят неверно. А потом сформулировать саму задачу: «Найти множество точек, принадлежащих середине отрезка постоянной длины, концы которого находятся на данных взаимно перпендикулярных прямых».

Или ещё как-нибудь менее наукообразно. Потом и эту задачу полезно дать для скрещивающихся прямых.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЗАРАЗА

Если один ученик всерьез «заболевает» творчеством, «болезнь» эта часто передается товарищам, всему классу. Надо только к этому подталкивать.

ТРИАДЫ

В такой обстановке иначе протекает формирование и привычных понятий. Уточняем сообща, например, понятия: определение, признак, свойство, устанавливаем связь между ними. Даю домашнее задание – написать небольшое сочинение на тему, условно названую «Триады» (определение, признак, свойство). Примеры ребята приводят не только из математики, но и из других наук. На уроке эти примеры обсуждаем, спорим, особенно, когда дело касается других дисциплин; иногда прибегаем к «арбитражу» учителей, ведущих эти предметы.

БЕСПЛАНОВОЕ ХОЗЯЙСТВО

Можно ведь и так учить: опросил, объяснил новое, закрепил, задал домашнее задание. И так всегда. Изо дня в день. Из года в год. У кого мало отметок, те пускай подучат – буду спрашивать, остальным можно расслабиться.

Я думаю, что учитель на уроке должен быть готов к неожиданностям, и ребята к ним должны быть готовы. Ученик не должен знать, когда его спросят. Спрашивать следует трудный материал; может быть, не ставить за него оценки. Конечно, если ученик заслужил, то поставить «отлично», а может быть даже поставить ту же оценку и за не вполне отличный ответ. Во всяком случае, оценить на «хорошо» или никак не оценить. Аннотировать этот ответ. Во второй или третий раз требовать «по полному». Впрочем, «я не знаю мудрости, годной для других».

МЫСЛЬ ВЕЛИКОГО ЧЕЛОВЕКА

Следить за мыслью великого человека есть наука самая занимательная. Учит вся обстановка кабинета математики, обстановка в широком смысле: плакаты, модели и, в первую очередь, стиль общения с учениками.

Мой кабинет увешан плакатами. Содержание большинства из них было подобрано самими учениками; иногда даже мне не было заранее известно, что они написали. Часть плакатов была изготовлена явно мне «в пику». Такие обязательно первое время красовались на видном месте. Высказывания очень полно характеризовали изготовителей, которые их выбирали. Часть высказываний, разумеется, отбирал сам, особенно вначале.

Теперь некоторые высказывания.

> Имей мужество пользоваться собственным умом
> *Кант*

> Прежде, чем решать задачу, полезно познакомиться с её условием
> *Дьёрдь Пойя*

Comparaison n'est pas raison (Сравнение не есть доказательство)
Французское изречение

Этот плакат я всегда показываю после ряда примеров на аналогию, когда она приводит к верным и к ошибочным заключениям.

В одном (уже математическом) моём классе учились две Тихоновы и обе – Светланы, пришлось их различать по отчествам: Светлана Владимировна и Светлана Алексеевна. Мать Светланы Алексеевны жаловалась постоянно, что дочери очень тяжело, засиживается она над уроками далеко за полночь. Мать просила меня поговорить с дочерью и была склонна перевести Светлану в обычную школу. Меня это тоже очень беспокоило, и порой я думал, что мама права. Но Света, правда, с большим трудом перешла в 10-й класс. Каждый год стараюсь встретить новичков хотя бы одним свежим изречением. С.А. позвонила мне и изъявила желание мне помочь. Как всегда в таком случае, я предоставил Свете самой выбрать изречение. Но она всё-таки еще раз позвонила и предложила на мой выбор несколько изречений. Я ей ответил, что все хороши. Некоторые из них она написала. Но какого было мое удивление, когда я 1-го сентября на двери своего кабинета увидел, как бы теперь сказали, несанкционированный плакат:

Внимание!
В этом кабинете вам помогут решить проблему свободного времени

Плакат висел на двери целый год. А потом я взял его в кабинет. А Светлана давно окончила математический факультет Университета.

Часто я вспоминаю вслух слова Стендаля:

Без тяжёлого балласта, даваемого трудом, корабль жизни становится игрушкой любого ветра

А вот ещё несколько изречений из моего кабинета.

Господи, дай мне душевный покой, чтобы принимать то, чего я не могу изменить, мужество — изменять то, что могу, и мудрость — всегда отличать одно от другого
Восточная мудрость

Cogito, ergo sum
Descartes (Cartesius)
Я мыслю, следовательно, я существую
Декарт

Очевидность умаляется доказательствами
Цицерон

Великие открытия начинаются парадоксами
и заканчиваются тривиальностями
Давид Гильберт

Бойся незнания, но ещё больше бойся ложного знания
Конфуций

Что хорошо понято, то легко и свободно излагается
В. Белинский

Одни поют, что знают; другие знают, что они поют
Испанская пословица

Для всех из нас, любой поймёт,
Есть год, в который мы родились,
Так значит существует год,
Когда мы все на свет явились.
Так, значит, папа, ты и я
Друг другу сверстниками стали.
Не лги, мой сын, менять нельзя
Свободно кванторы местами!

Обдумай, верно ли и возможно ли, что
ты обещаешь, ибо обещание есть долг
Китайское изречение

У входа в науку, как и у входа в ад, должно быть выставлено
требование: «Здесь нужно, чтоб душа была тверда;
здесь страх не должен подавать совета»
Карл Маркс

Талант великих душ есть узнавать великое в других
Н.М. Карамзин

МОДЕЛИ

О них уже говорилось. Но о них нужно сказать ещё. Шкафы моего кабинета ими полны. Причём все они сделаны самими ребятами. Даже наклонную треугольную призму с разносторонним основанием из плотной бумаги сделать не просто. Большинство моделей – это модели многогранников. Среди них модели к задачам, модели правильных и полуправильных тел. Некоторые иллюстрируют теоремы. Есть такие, которые иллюстрируют неудачное определение призмы. Среди них ромбический додекаэдр. Есть такой даже, сделанный из бронзы или какого-то материала, похожего на неё.

Вслед за выпуклыми ученики стали делать звёздчатые многогранники, потом многосвязные (с дырками). Много среди моделей было кристаллов. Были левые и правые кристаллы одного и того же вещества. Учителя химии и физики спорили, кому нужнее эти модели. Один ученик нашёл статью о том, что «дырчатые» малюсенькие многогранники, состоящие из 12 правильных додекаэдров, являются катализаторами! А один сделал модель бриллианта, хранящегося где-то в сейфе в Южной Америке.

КНИГИ

С большим трудом удается приучить учеников смотреть на книги, обсуждать их, говорить, какую книгу и где видел или даже купил. Этому надо учить. Сам показываю книги по теме или общего содержания как, например, «Игра с бесконечностью» Розы Петер или «Этот правый, левый мир» Гарднера. Рассказываю о них, пересказываю или читаю яркие места. Конечно, показываю все новые книги.

ПРИВЯЗАННОСТИ УЧИТЕЛЯ

Ученики могут и, пожалуй, должны чувствовать привязанность своего учителя к тому или иному материалу, теме, понятию и, конечно, к своим учителям, лекторам, учёным, авторам. Не скрываю, что мои любимые темы – скрещивающиеся прямые, многогранники; мои любимые учителя: по математике и литературе – Любовь Ивановна Соколкова и Василий Иванович Белавин. Мои любимые ученые – Эйлер и более всего – Архимед. Открытия Архимеда общеизвестны. Поразительно, что, перешагнув тысячелетие, он ко многим проблемам применил «нечистые» методы. В геометрии он применял физику, кроме циркуля и линейки он пользовался приложением к окружности отрезка постоянной длины, применил открытую им спираль, и таким образом, двумя «запрёщенными» способами решил знаменитую задачу о трисекции угла.

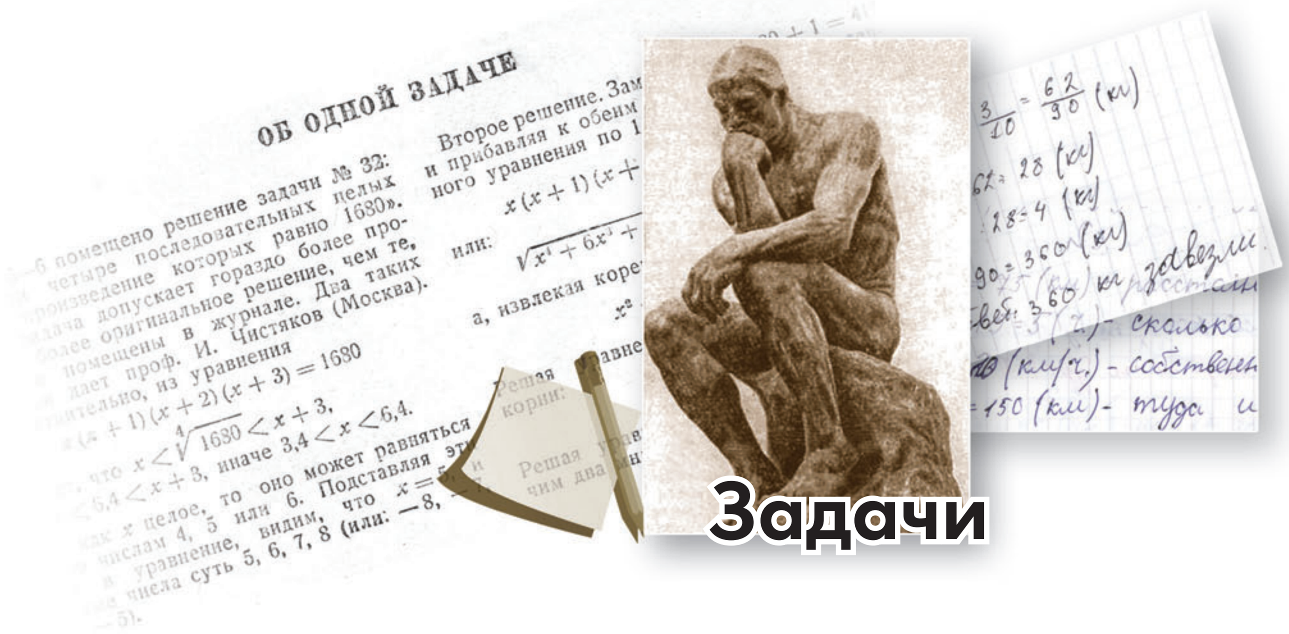
ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Я давно понял, что мы, учителя, существуем для них – учеников. Вольно или невольно мы думаем об учениках и уроках «в снах утра и в бездне вечерней»[2].

Очень многому они меня научили.

◀ **Вернуться к содержанию**

[2] Из стихотворения В. Брюсова «Поэту». – *Прим. А.П. Карпа.*



Задачи

Об отделе «Задачи»

Учитель математики, как правило, собирает интересные задачи. Начинаем собирать такую коллекцию и мы.

Задачи этого номера интересны наличием нескольких способов решения. Предлагаем «сверхзадачу» – найти как можно больше различных способов решений. Те читатели, кому это удастся лучше всего, будут награждены дипломами и призами редакции журнала «Полином». Поэтому мы пока не будем указывать источники, из которых взяты предлагаемые задачи (но обязательно сообщим об этом позднее, при публикации решений).

Как придумывать новые решения? У всех это происходит по-разному. Возможная посылка – как (каким способом) мог бы решить эти задачи школьник 8, 9 или 10 класса? Рекомендуем Вам замечательные книги И.А. Кушнира, где геометрические задачи исследуются именно с этой точки зрения[1].

Или (о задаче 2): обязательно ли решать её алгебраически? И нет ли чисто геометрического решения? Мы пока не знаем. Может быть, знает кто-нибудь из читателей?

Или (о задаче 1): неужели у задачи с таким симметричным условием нет какого-нибудь красивого идейного решения?

Присылайте Ваши решения.

Если Вы знаете какие-нибудь другие интересные задачи, решаемые несколькими способами – присылайте, мы с удовольствием их опубликуем. Если задача заимствована, то должен быть приведён источник заимствования.

С уважением,
ведущие отдела «Задачи»
Д.В. Прокопенко и *П.В. Чулков*

---

[1] Триумф школьной геометрии. – Киев: Наш час, 2005; Альтернативные способы решения задач (геометрия). – Киев: Факт, 2006; Геометрия на баррикадах. – Киев: Факт, 2009.

1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} a + bcd = 2, \\ b + acd = 2, \\ c + abd = 2, \\ d + abc = 2 \end{cases}$$

2. На сторонах треугольника площади S построены квадраты. Какое наименьшее значение может принимать сумма площадей этих квадратов?

3. Вычислите:

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}.$$

4. В треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр вписанной окружности проведена прямая, которая пересекает высоту AH в точке E. Докажите, что $AE = r$.

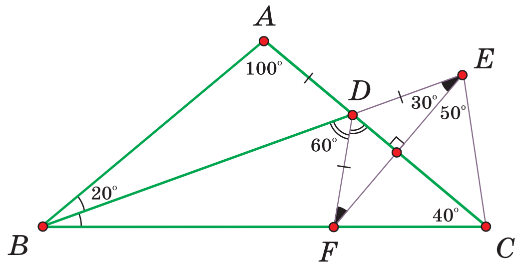
5. Угол при вершине B равнобедренного треугольника равен $80°$. Внутри треугольника выбрана точка M так, что $\angle MAC = 30°$, $\angle MCA = 10°$. Найдите угол AMB.

6. Пусть произвольная точка X принадлежит высоте AH треугольника ABC. Прямые BX и CX пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1. Докажите, что высота AH принадлежит биссектрисе угла B_1HC_1.

Вернуться к содержанию

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = AB$), угол CAB равен $100°$, BD – биссектриса угла ABC. Докажите, что $AD + BD = BC$.

Доказательство. Способ I. Сделаем дополнительные построения. На продолжении биссектрисы BD за точку D выберем точку E так, что $AD = DE$, и проведём биссектрису DF угла BDC (см. рис.).



Нетрудно видеть, что

$$\angle BDF = \angle FDC = \frac{1}{2}\angle BDC = \angle BDA = 60°.$$

Следовательно, треугольники ABD и DBF равны (BD – общая сторона, и прилежащие углы равны). Тогда равны отрезки AD, DE и DF. Значит, треугольник FDE – равнобедренный с углами при основании, равными каждый $30°$, и прямая DC является геометрическим местом точек, равноудалённых от точек F и E. Поэтому треугольник FCE также является равнобедренным. Получаем, что $\angle BEC = \angle BCE = 80°$, т.е. треугольник EBC также равнобедренный. Тогда $BD + AD = BD + DE = BE = BC$, что и требовалось доказать.

Способ II. Доказательство основано на применении теоремы синусов. Рассмотрим треугольник ABD. Имеем:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\sin 20°}{\sin 60°},\ \frac{BD}{AB} = \frac{\sin 100°}{\sin 60°}.$$

Складывая почленно эти соотношения, получим:

$$\frac{AD + BD}{AB} = \frac{\sin 20° + \sin 100°}{\sin 60°} = \frac{2\sin 60° \cos 40°}{\sin 60^0} = 2\cos 40° = \frac{\sin 80°}{\sin 40°} = \frac{\sin 100°}{\sin 40°}.$$

В треугольнике ABC $\frac{BC}{AB} = \frac{\sin 100°}{\sin 40°}$. Сравнив эти два соотношения, получим: $AD + BD = BC$, что и требовалось доказать.

2. В произвольном треугольнике ABC точка O_1 симметрична точке O – центру описанной окружности, относительно центра тяжести G этого треугольника. Докажите, что $O_1A^2 + O_1B^2 + O_1C^2 = 3R^2$, где R – радиус описанной окружности треугольника ABC.

Доказательство. Используем теорему Лейбница: «Сумма квадратов расстояний произвольной точки P от вершин треугольника равна сумме квадратов расстояний от вершин до центра тяжести треугольника, сложенной с утроенным квадратом расстояния от центра тяжести до данной точки»[1].

В соответствии с данной теоремой имеем:

$$O_1A^2 + O_1B^2 + O_1C^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3O_1G^2, \qquad (1)$$

где

$$AG = \frac{2}{3}m_a,\ BG = \frac{2}{3}m_b,\ CG = \frac{2}{3}m_c.$$

[1] См.: *Зетель С.И.* Новая геометрия треугольника. М.: Учпедгиз, 1962. С. 65.

Следовательно,

$$AG^2+BG^2+CG^2=\frac{4}{9}(m_a^2+m_b^2+m_c^2)=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2). \qquad (2)$$

Известна формула[2]:

$$O_1G=OG=\frac{1}{3}\sqrt{9R^2-(a^2+b^2+c^2)}. \qquad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), получим:

$$O_1A^2+O_1B^2+O_1C^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)+3\cdot\frac{1}{9}(9R^2-(a^2+b^2+c^2))=3R^2.$$

3. Треугольник ABC прямоугольный, a и b – длины его катетов, c – длина гипотенузы. Углы A, B и C противолежащие соответственно сторонам длины a, b и c. Докажите, что:

а) $\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}-\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}=\frac{1}{2}$,

б) $a^3+b^3+c^3=ab(a+b)+ac(a+c)-bc(b+c)$.

Доказательство. а). Пусть в прямоугольном треугольнике ABC $\angle C=90^0$. Проделаем выкладки:

$$\cos\frac{\angle A}{2}\cdot\cos\frac{\angle B}{2}\cdot\cos45^0-\sin\frac{\angle A}{2}\cdot\sin\frac{\angle B}{2}\cdot\sin45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\angle A}{2}\cdot\cos\frac{\angle B}{2}-\sin\frac{\angle A}{2}\cdot\sin\frac{\angle B}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\angle A+\angle B}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}.$$

б). Чтобы доказать требуемое, достаточно показать, что разность $a^3+b^3+c^3-$ $-(ab(a+b)+ac(a+c)-bc(b+c))$ равна нулю. Преобразуем последнее выражение:

$$a^3+b^3+c^3-ab(a+b)-ac(a+c)+bc(b+c)=$$
$$=a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2-a^2c-ac^2+b^2c+bc^2=$$
$$=(a^3-ab^2-ac^2)-(a^2b-b^3-b^2c)-(a^2c-b^2c-c^3)=$$
$$=a(a^2-b^2-c^2)-b(a^2-b^2-c^2)-c(a^2-b^2-c^2)=(a-b-c)(a^2-b^2-c^2).$$

Поскольку по условию треугольник прямоугольный, то второй множитель равен нулю, и требуемое равенство доказано.

4. Решить уравнение $\cos^2 x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}=\sin^2 2x$.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде: $2\cos^2 x-2\sin^2 2x=x+\frac{1}{x}$.

Применим формулы $1+\cos2\alpha=2\cos^2\alpha$, $1-\cos2\alpha=2\sin^2\alpha$; тогда уравнение примет вид: $1+\cos2x-(1-\cos4x)=x+\frac{1}{x}$ или $\cos2x+\cos4x=x+\frac{1}{x}$.

Нетрудно заметить, что при всех допустимых значениях x левая часть уравнения меньше или равна 2, а правая больше или равна 2. Следовательно, чтобы данное уравнение имело решение, должна быть совместной система уравнений: $x+\frac{1}{x}=2$, $\cos2x+\cos4x=2$.

[2] Там же. С. 69.

Первое уравнение имеет единственное решение $x = 1$. Решим второе уравнение: $\cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 = 2$, $2\cos^2 2x + \cos 2x - 3 = 0$, откуда $\cos 2x = -\frac{3}{2}$ или $\cos 2x = 1$. Значит, решением уравнения будет множество чисел $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Сравнивая решения первого и второго уравнений системы, видим, что у них нет общих корней. Следовательно, исходное уравнение также корней не имеет.

Ответ: решений нет.

5. Найдите все такие натуральные n, при которых выражение $8^n - 3^n - 6^n + 1$ делится на 10.

Решение. Очевидно, что при всех натуральных n значение данного выражения будет числом чётным, т.е. делящимся на 2. Поэтому задачу можно переформулировать так: «Найдите все такие натуральные n, при которых выражение $8^n - 3^n - 6^n + 1$ делится на 5».

Запишем это выражение в виде: $(5 + 3)^n - 3^n - (5 + 1)^n + 1$. Если раскрыть скобки, то его можно записать так: $5A + 3^n - 3^n - 5B - 1 + 1 = 5(A + B)$, где A и B – некоторые натуральные числа. Таким образом, значение выражения при любых натуральных n делится на 5, а в силу установленной ранее чётности его и на 10.

Ответ: $n \in N$.

6. Докажите, что для всех $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0; +\infty)$ и таких, что $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, справедливо неравенство

$$\left(a_1 + \frac{a_2}{a_3}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{a_3}{a_4}\right)^2 + \ldots + \left(a_n + \frac{a_1}{a_2}\right)^2 \geq 4n.$$

Доказательство. Данное неравенство может быть доказано различными способами. Покажем один из возможных.

Применив к каждой скобке неравенство $(x + y)^2 \geq 4xy$, получим:

$$\left(a_1 + \frac{a_2}{a_3}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{a_3}{a_4}\right)^2 + \ldots + \left(a_n + \frac{a_1}{a_2}\right)^2 \geq 4\left(\frac{a_1 a_2}{a_3} + \frac{a_2 a_3}{a_4} + \ldots + \frac{a_n a_1}{a_2}\right).$$

Применив далее неравенство о среднем $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ и учитывая, что $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, будем иметь:

$$\left(a_1 + \frac{a_2}{a_3}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{a_3}{a_4}\right)^2 + \ldots + \left(a_n + \frac{a_1}{a_2}\right)^2 \geq 4n\sqrt[n]{\frac{a_1 a_2}{a_3} \cdot \frac{a_2 a_3}{a_4} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n a_1}{a_2}} = 4n.$$

Вернуться к содержанию

Сергей Анатольевич БЕЛЯЕВ
преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института, учитель математики средней школы № 1173 г. Москвы
sergey_belyaev@mail.ru

Введение

На устном экзамене по математике не принято давать трудоёмкие, тяжеловесные задачи. Большой объём вычислений или многоходовые задачи тоже не приветствуются. Возникает необходимость предложить ученику задачу с коротким и, по возможности, красивым решением. Даже когда пятёрка не является самоцелью ученика (или же она невозможна), всё равно, именно простая красивая задача способна стимулировать интерес школьника к математике и явиться толчком для его роста.

Однако не только опросом на устном экзамене ограничивается область применимости таких задач. Наверное, именно самостоятельное решение или даже только знакомство с красивой, необычной задачей способствует развитию чувства прекрасного, внутренней честности, пониманию того, что значит «задача решена».

Действительно, в большинстве случаев мы стремимся не просто решить задачу: решить её красиво – вот достойная цель, предмет нашей надежды и шаг к достижению эстетической цели изучения математики.

О классификации задач

Понятно, что дать какую бы то ни было всеобъемлющую классификацию задач (тем более, красивых) крайне трудно, если вообще возможно. В этой статье мы выделим лишь три типа таких задач, руководствуясь скорее идеей тринитарности, чем идеей полноты или энциклопедичности. После приведения классификации станет понятно, что грань между задачами разных типов весьма размыта, и другой автор мог бы иначе классифицировать некоторые задачи, руководствуясь, другими целями или имея в виду конкретный класс.

Тип задачи может изменяться в зависимости от того, кто её решает. Так, задача-«ловушка» в 11 классе запросто может оказаться «неберушкой» для восьмиклассника, хотя эта задача им обоим будет понятна и доступна. Наиболее яркий пример – «ловушка» № 3 из прилагаемого банка задач. Следовательно, многое зависит от уровня математической культуры решающего ученика.

Более того, тип задачи может меняться даже в рамках одного класса при смене школьной темы. Например, при изучении сегмента, вмещающего данный угол, и метода ГМТ в задачах на построение (начало 8 класса) есть такая задача: «Построить треугольник по двум углам и медиане к третьей стороне». Скорее всего, для большинства учеников она окажется «неберушкой». (Надо догадаться удвоить медиану и построить целых два разных сегмента на полученных равных отрезках.) Однако после изучения метода подобия в задачах на построение, приведённая задача становится рядовой «простушкой», даже не представляющей особого интереса – в этой теме есть куда более важные и интересные «простушки». (Например: построить треугольник по двум углам и сумме радиусов вписанной и описанной окружностей).

Итак, моей целью будет не сообщить застывшую схему, а привести конкретные примеры задач разных типов и показать, как их можно использовать в обучении. Конечно, перерешать и знать весь океан задач невозможно. Но искать, помнить и доносить до ученика задачи-«жемчужины», способные увлечь, очаровать и заставить полюбить математику – может любой учитель математики. Для этого нужны коллекции «жемчужин», коллекции задач. Надеюсь, что среди задач статьи читатель найдёт что-нибудь, достойное своей коллекции. Если задача взята из конкретного источника, то этот источник указан.

«Простушки»

Наверное, ни один тип задач так не оправдывает своё название, как этот. Всем хорошо известны простые, изящные, короткие, но очень мудрые задачи, способные и очаровать, и научить, и проверить понимание пройденного. Они способны правильно расставить акценты в ходе преподавания материала, указать на его тонкие места или же охватить материал целиком. Приведём несколько примеров.

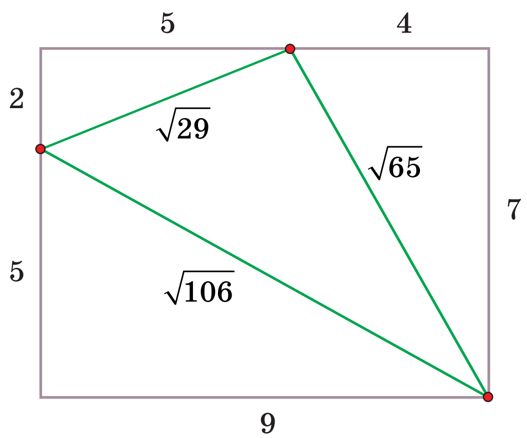
Пример 1 ([2]). В семье пять голов и четырнадцать ног. Сколько в семье людей, а сколько собак? (Никаких других животных, кроме собак, в этой семье нет.)

Предположим, что все люди встали на одну ногу, а все собаки на две задние. Тогда на земле стоят $14:2 = 7$ ног, то есть на две больше, чем число голов. Это получилось потому, что эти две ноги принадлежат двум собакам, то есть было 2 собаки и 3 человека.

Конечно, эту задачу можно решить и прямым подбором. Однако если школьник знает общий приём, позволяющий решать все задачи такого вида, то этот ученик на голову выше того, кто такого способа не знает. И потом, такой способ просто красив! Предложение решить такую задачу на устном экзамене – хороший способ понять, понимает ли ученик, как поступать в нестандартных ситуациях. Предложение решить такую задачу в рабочем порядке (для опытного учителя) – отличное начало увлекательного разговора и хороший способ удивить учеников.

Пример 2 ([9]). Найдите площадь треугольника, если известны три его стороны: $\sqrt{29}$, $\sqrt{65}$, $\sqrt{106}$.

Ответ задачи ясен из рисунка.



Площадь треугольника: $S = 9\cdot 7 - \dfrac{9\cdot 5}{2} - \dfrac{2\cdot 5}{2} - \dfrac{4\cdot 7}{2} = \dfrac{43}{2}$.

Понятно, что лобовое применение формулы Герона хотя и возможно, однако крайне громоздко. Чуть лучше применение модификации формулы Герона:

$$4S^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2,$$

удобной для поиска площади треугольника, длины сторон которого иррациональны. Однако в данном примере приходится оперировать с трёхзначными числами. Приведённое решение если не лучшее, то заведомо короткое.

Возникает вопрос: почему четырёхугольник в решении будет прямоугольником (а не шестиугольником)? Конечно, можно рассуждать так: рассмотрим прямоугольник, соединим точки, как показано на рисунке, посчитаем длины сторон нарисованного треугольника, он окажется равным данному. Однако демонстрация приведённого рисунка ошеломляет и не оставляет места для сомнений. Трудно не восхититься эстетикой решения в стиле древних индусов: «Смотри!».

Пример 3 ([2]). Из A в B и из B в A на рассвете (одновременно) вышли навстречу друг другу (по одной дороге) две старушки. Они встретились в полдень, но не остановились, а каждая продолжала идти с той же скоростью, и первая пришла (в B) в 4 часа дня, а вторая (в A) в 9 часов вечера. В котором часу был в этот день рассвет?

Эту задачу можно решать долго, а можно устно, если сообразить, что отношение времён, за которые старушки преодолевают отрезки пути до и после встречи, одинаково для обеих старушек. После этого мгновенно получается пропорция $\dfrac{4}{T} = \dfrac{T}{9}$, где T – время от рассвета до полудня, откуда $T = 6$, то есть рассвет был в 6 утра.

«Ловушки»

К этому типу можно отнести задачи, имеющие очевидное, но долгое, нерациональное решение. Кроме этого, задача–«ловушка» может иметь простое решение (это их роднит с задачами предыдущего типа), до которого не сразу, но можно догадаться (это объединяет их со следующим типом задач – «неберушками»). Также к этому типу можно отнести задачи на тонкие и нетривиальные факты теории, которые становятся очевидными только после сообщения ответов. Пожалуй, «ловушки» в большей степени чем «простушки» могут диагностировать глубокое понимание пройденного материала. Способность школьника не попасться в расставленную «ловушку» уже позволяет судить об уровне его критического мышления. Если «простушки» подчёркивают тот или иной подход или метод, то «ловушки» требуют или, если хотите, вынуждают дойти до самой сути. И опять примеры.

Пример 4 ([4]). Существует ли обратимая функция, которая одновременно является чётной и нечётной?

Если в условии отбросить слово «обратимая», то простой (но не обязательно тривиальный) пример даст функция $y = 0$. Добавление требования обратимости часто вынуждает школьников считать, что требуемой функции не существует. Однако функция $y = \sqrt{-x^2}$, график которой состоит из единственной точки, обратна самой себе и удовлетворяет всем требованиям задачи.

Пример 5 ([9]) Найдите радиус наименьшего круга, которым можно накрыть треугольник со сторонами 5, 6 и 8.

Обычно школьники думают, что искомым является круг, ограниченный описанной окружностью. Для поиска его радиуса начинаются муки поиска синуса какого-нибудь угла, косинуса этого угла и радиуса описанной окружности по теореме синусов. Даже если школьник проведёт все выкладки безошибочно, то он всё равно получит неправильный ответ. Дело в том, что данный треугольник тупоугольный ($8^2 > 5^2 + 6^2$). Следовательно, искомый радиус равен половине большей стороны треугольника, то есть 4.

Пример 6 ([6]). Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 1, а основание равно *a*. Хорда окружности, описанной около этого треугольника, пересекает обе его боковые стороны и делится ими на три равные части. Найдите длину такой хорды.

Очевидно, что всегда ($0 < a < 2$) существует хорда, обладающая требуемыми свойствами, параллельная основанию треугольника. Её длина $\frac{3a}{2a^2+1}$. Это очевидное решение школьник, скорее всего, найдёт. Однако интересно, что при $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ задача имеет ещё одно решение: $\frac{3}{\sqrt{9-2a^2}}$.

Пример 7 ([2]). Найдите коэффициент при *x* у многочлена

$$(x-a)(x-b)(x-c)\cdot\ldots\cdot(x-z).$$

Ошеломляющий ответ: 0. Произведение содержит сомножитель $(x-x)$.

Пример 8. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 8, а высота, проведённая к гипотенузе, равна 5. Найдите площадь этого треугольника.

Медиана к гипотенузе данного треугольника равна 4, а так как высота любого треугольника всегда короче медианы, выходящей из той же вершины, то высота, проведённая из вершины прямого угла, не может равняться 5. Такого треугольника не существует.

Лирическое отступление

Математика и преподавание математики – это как чёрное и кислое. И чем раньше мы это поймём, тем лучше станем преподавать.
И.А. Кушнир (из частной беседы)

Можно было бы даже не упоминать, что подавляющее число школьников в последней задаче даёт ответ 20. В 1970-е годы Г.В. Дорофеев высказывал мнение, что задачу типа вычисления площади несуществующего треугольника предлагать в такой формулировке некорректно: это так называемая задача на реализованную ситуацию – треугольник дан, поэтому ответ 20 вне зависимости ни от чего. Позже даже была развёрнута дискуссия на эту тему (она рассмотрена в книге В.И. Рыжика «30000 уроков математики». М.: Просвещение, 2003). Все участники этой дискуссии имели серьёзные аргументы в защиту своего мнения.

Рискну признаться, что неожиданно для себя я вынужден... согласиться с Г.В. Дорофеевым! Разумеется, предлагать такие задачи некорректно... с точки зрения «чёрного»! Однако, что некорректно с точки зрения «чёрного», может оказаться необыкновенно полезным с точки зрения «кислого». Риторический вопрос: какой ученик лучше понимает геометрию: тот, который упорствует, ссылается на авторитет (в данном случае на Г.В. Дорофеева) и знает только формулу площади треугольника, или тот, который не попадётся в расставленную «ловушку» и сообразит, что наклонная (медиана) короче перпендикуляра (высоты)... вне зависимости ни от чего?

«Неберушки»

Существуют задачи, которые никакой школьник либо не может решить в принципе, либо догадаться до её решения крайне трудно. Это в своём большинстве единичные задачи, которые обычно «знают в лицо». Такие задачи могут быть нужны с одной стороны, для того чтобы (что греха таить) завалить школьника на экзамене. Более человечный способ применения таких задач: их можно давать как задачи для домашнего размышления сильным школьникам для того, чтобы продемонстрировать возможности их роста.

Классический способ получения таких задач состоит в следующем [1]. Берутся две какие-либо квадратичные функции, желательно с плохими корнями, например, $x^2 + 3x - 7$ и $y^2 + 4y - 11$. Потом первая функция подставляется во вторую, проводятся необходимые выкладки и результат приравнивается к нулю. В нашем примере получается:

$$(x^2 + 3x - 7)^2 + 4(x^2 + 3x - 7) - 11 = x^4 + 6x^3 - x^2 - 30x + 10 = 0.$$

Полученное уравнение можно смело давать школьнику. Главное – не потерять бумажку с обратными выкладками!

Существует ряд задач, не решаемых по определению.

Пример 9. Доказать, что при всех x

$$x^2(\sqrt{3+32\sin^2 15^\circ}+\cos 22^\circ+\cos 70^\circ+\cos 88^\circ+2\sqrt{2}\sin 15^\circ)+$$
$$+4x(\cos 11^\circ+\cos 35^\circ+\cos 44^\circ)+6\geq 0.$$

Есть задачи простые идеологически и крайне трудные технически. Однако внешний вид задачи настолько невинен, что о предстоящей засаде школьник и не подозревает.

Пример 10. Вычислите без таблиц и калькулятора число $tg\frac{\pi}{7}tg\frac{2\pi}{7}tg\frac{3\pi}{7}$.

Знаменатель в этой задаче оценивается легко, хотя и не тривиально:

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} = (\text{выкладки средней длины}) = \frac{1}{8}.$$

Для оценки же числителя нужно догадаться (кто рискнёт сказать, что знает как это сделать?) возвести его в квадрат:

$$\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} = (\text{очень длинные выкладки}) = \frac{7}{64}.$$

Откуда непосредственно следует ответ.

Небольшой банк задач

Надеюсь, что следующая, конечно немногочисленная, подборка задач сможет стимулировать учителей к коллекционированию красивых задач – жемчужин элементарной математики и к применению их на уроках и устных экзаменах (вступительных и переводных) в школах. Разделение задач, конечно, условно и отражает личные вкусы автора. Ещё раз замечу, что одна и та же задача может быть как очень простой и поучительной, так и очень трудной – в зависимости от того, кому и в какой момент времени она предложена. Дело педагогического такта учителя определить этот момент.

«Простушки»

1 ([7]). Многочисленные бомжи, чтобы покурить, собирают окурки. Из четырёх окурков бомжи наловчились сделать одну сигарету. Сколько сигарет сможет выкурить бомж, собравший 24 окурка?

2 ([1]). Вычислить $\lg(tg1°)\cdot\lg(tg2°)\cdot\ldots\cdot\lg(tg89°)$.

Ответ: 0, так как среди сомножителей есть $\lg(tg45°)$.

3. Может ли сечение куба быть правильным пятиугольником?

4. Решите уравнение $x^3+x^2+x+\frac{1}{3}=0$.

Указание: Умножить на три и выделить куб суммы.

5. Задача 4. Разложите на множители x^4+1.

Решение:

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1).$$

6 ([1]). Можно ли с помощью циркуля и линейки разделить угол в 19° на 19 равных частей?

Указание: $19°\times19=361°=360°+1°$.

7. Центробанк устанавливает курс валют один раз в день. В начале первого дня мирового финансового кризиса цена доллара увеличилась на 5%, а цена евро уменьшилась на 5%. В начале следующего дня цена доллара уменьшилась на 5%, а цена евро увеличилась на 5%. На сколько процентов изменилась цена каждой из валют? Для какой валюты эта цена уменьшилась? Изменение цены какой валюты оказалось больше к концу второго дня кризиса?

Указание: Это задача на понимание того, что

$$(1-a)(1+a)=(1+a)(1-a)=1-a^2.$$

«Ловушки»

8. Дан треугольник ABC со сторонами $AB=5$, $BC=6$ и $CA=7$. Построить с помощью циркуля и линейки точки $A_1\in BC$, $B_1\in AC$, $C_1\in AB$ так, чтобы треугольник $A_1B_1C_1$ был правильным.

9. Правильный тетраэдр и правильный октаэдр с одинаковыми рёбрами склеили по треугольной грани. Сколько граней у полученного многогранника?

Замечание: У этой задачи неожиданный ответ 5.

10 ([9]). Найдите геометрическое место точек, из которых данный квадрат виден под углом 60°.

11 ([1]). Найдите соотношение между функциями $\arcsin(\cos(\arcsin x))$ и $\arccos(\sin(\arccos x))$.

12 ([8]). Решите уравнение $8x^2(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$.

Замечание: Известна задача определения количества корней этого уравнения на отрезке [0; 1].

13 ([1]). Найдите период дроби $\frac{1}{49} = 0{,}204081632\ldots$ Как можно объяснить тот факт, что после запятой появляются степени числа 2?

«Неберушки»

14. Две биссектрисы у треугольника равны. Докажите, что он равнобедренный.

Указание: Это теорема Штейнера-Лемуса. Одно из самых красивых геометрических решений приведено в книге Кокстера и Грейтцера «Новые встречи с геометрией». Отметим, что если не требовать геометрического решения, то эта задача просто решается с помощью формулы длины биссектрисы.

15 ([4]). Решить уравнение $x^2 - 5 = \sqrt{x+5}$.

16. Докажите, что сумма длин медиан треугольника не менее, чем в девять раз превосходит радиус вписанной в этот треугольник окружности.

17. Существует ли такой тетраэдр $ABCD$, что $AB = CD = 8$, $AC = BD = 10$, $AD = BC = 13$?

18. Докажите, что в любом треугольнике (в стандартных обозначениях)

$$tg\frac{\angle A}{2} + tg\frac{\angle B}{2} + tg\frac{\angle C}{2} = \frac{4R+r}{p}.$$

Указание: См. приложение к книге В.В. Прасолова «Задачи по планиметрии» [5].

19. Сколько корней имеет уравнение $\sin x = \frac{x}{100}$?

Ответ: 63.

Литература

1. *Алфутова Н.Б., Устинов А.В.* Алгебра и теория чисел. Сборник задач. – М.: МЦНМО, 2005.

2. *Арнольд В.И.* Задачи для детей от 5 до 15 лет. – М.: МЦНМО, 2004.

3. *Гельфанд И.М., Шень А.* Алгебра. – М., МЦНМО, 2009.

4. *Горнштейн П.И., Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.* Подводные рифы конкурсного экзамена по математике. – Киев: Евроиндекс Лтд, 1994.

5. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. – М.: МЦНМО, 2007.

6. *Шарыгин И.Ф.* Геометрия. Планиметрия. От учебной задачи к творческой. – М.: Дрофа, 2001.

7. *Шарыгин И.Ф.* Математический винегрет. – М.: Мир, 2002.

8. *Шарыгин И.Ф.* Сборник задач по математике с решениями. 11 класс. – М.: Просвещение, 2008.

9. *Шарыгин И.Ф.* Стандарт по математике: 500 геометрических задач: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 2007.

Вернуться к содержанию

Франсуа Виет и геометрия. Теорема косинусов

Григорий Борисович ФИЛИППОВСКИЙ
учитель математики Русановского лицея г. Киева
shvilka@mail.ru

Удивительно, как много успел сделать во всех областях математики Франсуа Виет (1540–1603)! Юрист по профессии, родившийся на юге Франции в городке Фонтене-ле-Конт, Виет считается «отцом современной алгебры».

Франсуа Виет

Действительно, до него всё в алгебре записывалось словами, включая уравнения. Виет же ввёл символы: для неизвестных – гласные буквы A, E, I, Y...; для известных – согласные B, C, D...

Опираясь на труды Н. Тарталья, Дж. Кардано, С. дель Ферро, Л. Феррари, он заложил основы общей теории алгебраических уравнений. После выхода в свет своей главной работы по алгебре «Введение в аналитическое искусство» Виет писал: «Все математики знали, что под алгеброй и алмукабалой скрыты несравненные сокровища, но не умели их найти. Задачи, которые они считали наиболее трудными, легко решаются десятками с помощью нашего искусства...»

Уже более 400 лет служит верой и правдой математике *теорема Виета* – одно из самых знаменитых алгебраических утверждений. Термин «коэффициент» впервые встречаем у Виета. Он же первым начинает «работать» с десятичными дробями, с квадратными и фигурными скобками. Виет вывел аналитическое выражение для числа π в виде бесконечного произведения квадратных корней.

Увлечение Виета астрономией дало потрясающие результаты в тригонометрии: формулы тройных углов, теорему тангенсов, формулы разложения $\cos nx$ и $\sin nx$ по степеням $\cos x$ и $\sin x$, полное решение плоских и сферических треугольников по трём элементам!..

И это притом, что Виет вовсе не являлся профессиональным математиком. Он – советник при дворе короля Генриха IV. Особую славу на этом поприще Виет снискал после того, как сумел подобрать ключ к сложнейшему шифру секретной переписки короля Испании с его послом в Нидерландах. В результате король Франции был в курсе всех действий своих противников.

Франсуа Виет блестяще владел *геометрией*, знал и любил труды древнегреческих геометров, учился у них. Видел свою задачу в том, чтобы навести прочные мосты между юной растущей алгеброй и древней, мудрой геометрией: «Я хочу соединить остроумные измышления новейших алгебраистов с глубокими изысканиями древних геометров».

По отрезку, равному a, Виет строил с помощью циркуля и линейки отрезки $a\sqrt{5}$, $a\sqrt{11}$, $a\sqrt{17}$, $a\sqrt{19}$ (покажите, как это выполняется).

Уравнения третьей и четвёртой степеней Виет часто решал с помощью трисекции угла, используя «метод вставок» Архимеда.

Именно Франсуа Виет впервые полностью разобрал случай решения треугольников по двум сторонам и углу против одной из них: a, b, $\angle A$ (наиболее сложный случай). Он показал что: а) решение не всегда возможно; б) если решение существует, то их может быть одно или два (покажите это).

И главное: *Франсуа Виет первым сформулировал в современном виде теорему косинусов.* До него даже очевидную сегодня задачу: «По элементам b, c, $\angle A$ найти сторону a в треугольнике ABC» решали довольно сложно (проводили высоты и несколько раз использовали прямоугольные треугольники). Совсем близко к теореме косинусов подошли арабские математики Аль-Бируни и Аль-Каши, но всё же ни тот, ни другой так и не сформулировали её.

Сегодня теоремой косинусов едва ли кого удивишь. Но в XVI веке, более 400 лет назад!.. И потом, не забудем, что с её помощью могут быть получены: теорема Птолемея, теорема Стюарта, формула Эйлера, формула Герона, формула медианы, а также многие другие формулы и теоремы. А знаменитая теорема Пифагора – не что иное, как следствие теоремы косинусов. Поскольку Виет является «родителем» теоремы косинусов, то пусть подборка задач с её использованием будет *небольшим гимном* этому замечательному учёному!..

Задача 1. В треугольнике ABC со сторонами a, b, c выполняется равенство: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}=\frac{3}{a+b+c}$. Найдите величину угла A.

Решение. Избавившись от знаменателя, получим: $a^2 = b^2 + c^2 - bc$. Но по теореме косинусов $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle A$. Таким образом, $\cos\angle A=\frac{1}{2}$ и $\angle A=60°$.

Задача 2. В треугольнике ABC известны сторона a и противолежащий угол A. Найдите его площадь, если известно, что $b+c=a\sqrt{2}$.

Решение. Согласно условию, $(b + c)^2 = 2a^2$, или $b^2 + c^2 + 2bc = 2a^2$. Но $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle A$ (по теореме косинусов). Имеем:

$$a^2+2bc(1+\cos\angle A)=2a^2,\ 4bc\cos^2\frac{\angle A}{2}=a^2,\ 2bc\cdot\sin\angle A\cdot\cos\frac{\angle A}{2}=a^2\sin\frac{\angle A}{2},$$

$$4S=a^2tg\frac{\angle A}{2} \text{ и } S=\frac{a^2}{4}tg\frac{\angle A}{2}.$$

Задача 3. Продолжение биссектрисы угла A пересекает описанную около неравнобедренного треугольника ABC окружность в точке W (рис. 1). Докажите, что $AW=\dfrac{b+c}{2\cos\frac{\angle A}{2}}$.

Решение. По теореме косинусов для треугольника ABW:

$$BW^2=AW^2+c^2-2AW\cdot c\cdot\cos\frac{\angle A}{2}.$$

По этой же теореме для треугольника ACW:

$CW^2 = AW^2 + b^2 - 2AW \cdot b \cdot \cos\frac{\angle A}{2}$. Поскольку $BW = CW$ (дуги BW и CW равны, а равные дуги стягиваются равными хордами), то получаем:

$$AW^2 + c^2 - 2AW \cdot c \cdot \cos\frac{\angle A}{2} = AW^2 + b^2 - 2AW \cdot b \cdot \cos\frac{\angle A}{2},$$

$$2AW\cos\frac{\angle A}{2}(b-c) = b^2 - c^2, \text{ откуда } AW = \frac{b+c}{2\cos\frac{\angle A}{2}}.$$

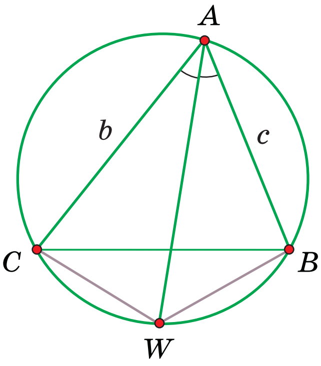


Рис. 1.

Задача 4. Медианы AM_1 и BM_2 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что треугольник AMM_2 – равносторонний. Найдите угол A.

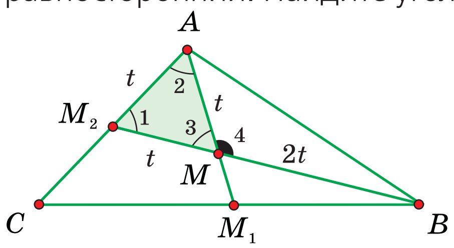


Рис. 2.

Решение. Пусть $AM = MM_2 = M_2A = t$ и $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 60°$ (рис. 2). Тогда $\angle 4 = 120°$ и $BM = 2MM_2 = 2t$. По теореме косинусов для треугольника AMB: $AB^2 = t^2 + 4t^2 - 2t \cdot 2t \cdot \cos 120°$ или $AB = t\sqrt{7}$. Вновь по теореме косинусов для треугольника ABM_2 имеем: $9t^2 = t^2 + 7t^2 - 2t \cdot t\sqrt{7}\cos\angle A$, откуда $\cos\angle A = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$. Следовательно, $\angle A = \pi - \arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}$.

Задача 5 (*Теорема Стюарта.*) Пусть точка Q делит сторону $BC = a$ на отрезки $CQ = q$ и $BQ = n$ (рис. 3). Докажите, что длина отрезка AQ вычисляется по формуле $AQ^2 = \frac{n}{a}b^2 + \frac{q}{a}c^2 - qn$.

Решение. Пусть $AQ = x$, $\angle 1 = \alpha$, $\angle 2 = 180° - \alpha$. По теореме косинусов для треугольника ABQ:

$$c^2 = x^2 + n^2 - 2xn\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{x^2 + n^2 - c^2}{2xn} \qquad (1)$$

Теорема косинусов для треугольника ACQ даёт такое равенство:

$$b^2 = x^2 + q^2 + 2xq\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 - x^2 - q^2}{2xq} \qquad (2)$$

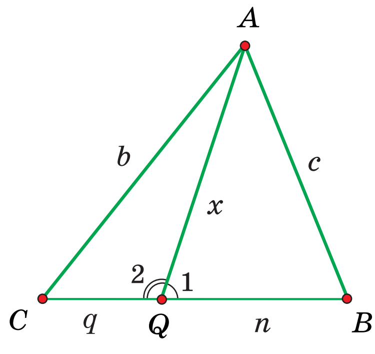


Рис. 3.

Приравняв (1) и (2), получим:

$$\frac{x^2 + n^2 - c^2}{2xn} = \frac{b^2 - x^2 - q^2}{2xq},$$

$$x^2q + n^2q - c^2q = b^2n - x^2n - q^2n, \quad x^2(q+n) = b^2n + c^2q - nq(q+n).$$

Поскольку $q + n = a$, получаем: $x^2 = AQ^2 = \frac{n}{a}b^2 + \frac{q}{a}c^2 - nq.$

Задача 6. В параллелограмме со сторонами a и b ($a > b$) из середины большей стороны параллельная сторона видна под углом φ. Найдите площадь параллелограмма.

Решение. Пусть $BC = AD = a$, $AB = CD = b$ и $\angle ATD = \varphi$, где T – середина BC (рис. 4). Пусть также $\angle ABC = \alpha$ и $\angle DCB = 180° - \alpha$.

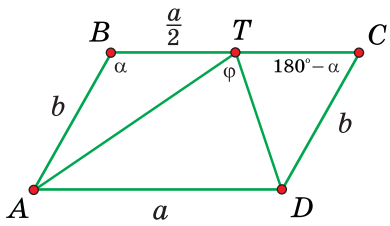


Рис. 4.

По теореме косинусов для треугольника *ABT*:

$$AT^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} - ab\cos\alpha \qquad (1)$$

По ней же для треугольника *DCT*:

$$TD^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} + ab\cos\alpha \qquad (2)$$

Вновь по теореме косинусов для треугольника *ATD* имеем: $a^2 = AT^2 + TD^2 - 2AT\cdot TD\cdot\cos\varphi$.

Подставим в последнее равенство AT^2 и TD^2 из (1) и (2) и выразим $AT\cdot TD$:

$$a^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} - ab\cos\alpha + b^2 + \frac{a^2}{4} + ab\cos\alpha - 2AT\cdot TD\cos\varphi,$$

$$AT\cdot TD = \frac{2b^2 - \frac{a^2}{2}}{2\cos\varphi} = \frac{4b^2 - a^2}{4\cos\varphi}.$$

Тогда $S_{ATD} = \frac{1}{2}AT\cdot TD\sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{4b^2 - a^2}{4\cos\varphi}\sin\varphi.$

Очевидно, площадь треугольника *ATD* составляет половину площади параллелограмма *ABCD*, поэтому $S_{ABCD} = \frac{4b^2 - a^2}{4}tg\varphi.$

Задача 7. В прямоугольном треугольнике с катетами 9 и 12 найдите расстояние *MI* между точками пересечения его медиан и биссектрис.

Решение. Пусть в прямоугольном треугольнике *ABC* ($\angle C = 90°$) $BC = 9$, $AC = 12$ (рис. 5). По теореме Пифагора $AB = 15$, $CM_3 = \frac{15}{2}$ (медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы) и $CM = \frac{2}{3}CM_3 = 5$.

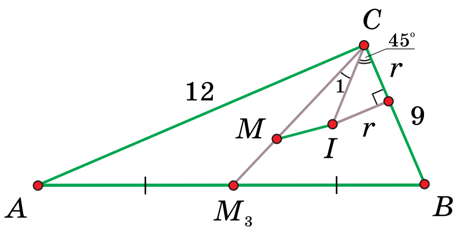


Рис. 5.

Радиус вписанной в треугольник *ABC* окружности вычисляется по формуле: $r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{9+12-15}{2} = 3$. Тогда $CI = r\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Так как треугольник BCM_3 равнобедренный ($BM_3 = CM_3$), то $\angle BCM_3 = \angle B$. Значит, $\angle 1 = \angle B - 45°$.

По теореме косинусов для треугольника *MCI*:

$$MI^2 = CM^2 + CI^2 - 2CM\cdot CI\cdot\cos(\angle B - 45°).$$

Из треугольника *ABC* $\cos\angle B = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$, $\sin\angle B = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$. Получаем:

$$MI^2 = 25 + 18 - 2\cdot5\cdot3\sqrt{2}\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$MI^2 = 43 - 30\sqrt{2}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 43 - 42 = 1,\ MI = 1.$$

Задача 8. На окружности ω даны точки *A* и *B*. Найти на ω точку *X* такую, чтобы сумма $XA^2 + XB^2$ была максимальной.

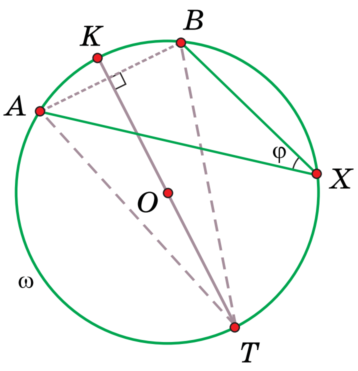


Рис. 6.

Решение. Очевидно, что точка X находится на той из дуг AB, которая больше. При этом AB и $\angle AXB = \varphi$ фиксированы. По теореме косинусов для треугольника AXB: $AB^2 = XA^2 + XB^2 - 2XA \cdot XB \cdot \cos\varphi$. Преобразуем это выражение:

$$XA^2 + XB^2 = AB^2 + 2XA \cdot XB \cdot \sin\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

$$XA^2 + XB^2 = AB^2 + 4S_{AXB} \cdot ctg\varphi.$$

Поскольку AB и φ постоянны, то максимальное значение выражения $XA^2 + XB^2$ достигается при максимальной площади треугольника AXB. Нетрудно видеть, что это произойдет, когда точка X совпадет с точкой T, где T – наиболее удаленная от AB точка диаметра KT, перпендикулярного отрезку AB (рис. 6).

Задача 9. Постройте вписанный четырехугольник $ABCD$ по данным его сторонам a, b, c, d.

Решение. Пусть $AD = a$, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$. Пусть также $BD = x$, $\angle BAD = \alpha$ и $\angle BCD = 180° - \alpha$ (рис. 7).

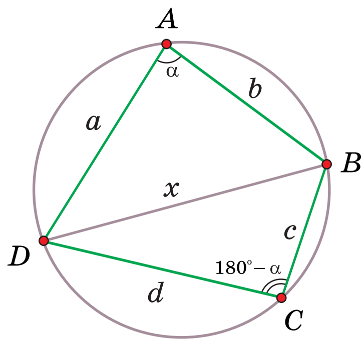


Рис. 7.

По теореме косинусов для треугольника BAD:

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab} \quad (1)$$

По теореме косинусов для треугольника BCD:

$$x^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{x^2 - c^2 - d^2}{2cd} \quad (2)$$

Приравняв (1) и (2), выразим x^2:

$$\frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab} = \frac{x^2 - c^2 - d^2}{2cd}, \quad x^2 = \frac{(a^2 + b^2)cd + (c^2 + d^2)ab}{ab + cd},$$

$$x^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}, \text{ откуда } x = \frac{\sqrt{ac + bd} \cdot \sqrt{ad + bc}}{\sqrt{ab + cd}}.$$

Построить отрезок x нетрудно. Покажем, как построить, например, отрезок $n = \sqrt{ac + bd} = \sqrt{a\left(c + \frac{bd}{a}\right)}$. Строим отрезок $q = \frac{bd}{a}$ – элементарное построение; затем строим отрезок $t = c + q$. И, наконец, $n = \sqrt{at}$ – также элементарное построение. Все дальнейшие построения очевидны!..

Задача 10. Докажите, что в произвольном треугольнике ABC со сторонами a, b, c и углами A, B, C выполняется неравенство $ab\cos\angle C + bc\cos\angle A + ac\cos\angle B \ge \frac{2}{3}p^2$, где p – полупериметр треугольника ABC.

Решение. Согласно теореме косинусов, $ab\cos\angle C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$. Аналогично, $bc\cos\angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$, $ac\cos\angle B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$. Значит, необходимо доказать, что:

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2 + b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + c^2 - b^2}{2} \ge \frac{2}{3}p^2, \quad \text{или} \quad \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \ge \frac{2}{3}\frac{(a + b + c)^2}{4}, \quad \text{или}$$

$3(a^2 + b^2 + c^2) \ge (a + b + c)^2$, или, после раскрытия скобок: $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ac$, что верно (знаменитое *неравенство трёх квадратов*).

Задачи для самостоятельного решения

1. Площадь треугольника *ABC* вычисляется по формуле: $S=\frac{1}{4}(a^2-b^2-c^2)$. Найдите угол *A*. (Ответ: 135°.)

2. Найдите угол *A* в треугольнике *ABC*, для которого выполняется равенство: $4\sqrt{3}S=b^2+c^2-a^2$. (Ответ: 30°.)

3. *AB* и *CD* – основания трапеции, около которой описана окружность ω. *TQ* – диаметр ω, причем $TQ \parallel AB$. *K* – точка на прямой *TQ*. Докажите, что $KA^2+KB^2=KC^2+KD^2$.

4. *K* – точка на диаметре *AB* окружности ω. Проводятся всевозможные хорды *CD*, параллельные *AB*. Докажите, что $KC^2+KD^2=\text{const}$.

5. Докажите справедливость следующих формул в произвольном треугольнике: $a^2=(b+c)^2-4S\cdot ctg\frac{\angle A}{2}$, $a^2=(b-c)^2+4S\cdot tg\frac{\angle A}{2}$, где *a*, *b*, *c* – стороны треугольника, угол *A* – противолежащий стороне *a*, *S* – площадь треугольника.

6. Вписанная в треугольник *ABC* окружность касается сторон *AB* и *AC* в точках *K* и *N* соответственно. Известно, что *AK* : *KB* = 1 : 6, *AN* : *NC* = 1 : 7. Найдите величину угла *A*. (Ответ: 120°.)

7. Вписанная в треугольник *ABC* окружность касается сторон *AB* и *AC* в точках *K* и *N* соответственно. Известно, что *BN* = *CK*. Докажите, что треугольник *ABC* – равнобедренный.

8. Докажите *теорему Птолемея*: во вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений его противоположных сторон.

9. В параллелограмме известны две стороны *a* и *b* ($a > b$) и острый угол α между диагоналями. Найдите площадь параллелограмма. (Ответ: $\frac{a^2-b^2}{2}tg\alpha$.)

10. Высоты треугольника *ABC* связаны соотношением: $h_a=h_b+h_c$. Докажите, что $\cos\angle A\geq\frac{7}{8}$.

Литература

1. *Баран О.І.* Математичні мініатюри. – К.: Ленвіт, 2007.
2. *Виленкин Н.Я., Шибасов Л.П., Шибасова З.Ф.* За страницами учебника математики. – М.: Просвещение, 1996.
3. *Глейзер Г.И.* История математики в школе. – М.: Просвещение, 1964.
4. *Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж.* Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. – М.: Мир, 1986.
5. *Крысицкий В.* Шеренга великих математиков. – Варшава: Наша ксенгарня, 1970.
6. *Кушнір І.А.* Методи розв'язання задач з геометрії. – К.: Абрис, 1994.
7. *Лоповок Л.М.* Факультативные занятия по геометрии для 7–11 классов. – К.: Радянська школа, 1990.
8. *Попов Г.Н.* Сборник исторических задач по элементарной математике. – М.: КомКнига, 2006.
9. *Скопец З.А., Готман Э.Г.* Задача одна – решения разные. – К.: Радянська школа, 1988.
10. *Чистяков В.Д.* Старинные задачи по элементарной математике. – Мн: Высшая школа, 1966.
11. *Шепелева З.В., Шепелев М.Н.* Франсуа Виет // Математика в школе. 1992. № 4–5. С. 43–45.
12. *Юшкевич А.П.* История математики в средние века. – М.: Физматгиз, 1961.

Вернуться к содержанию

Математики-педагоги

Профессор Фёдор Фёдорович Нагибин (к 100-летию со дня рождения)

Евгений Степанович КАНИН
профессор кафедры математического анализа и методики преподавания математики Вятского государственного гуманитарного университета

Исполнилось 100 лет со дня рождения профессора Фёдора Фёдоровича Нагибина, талантливого педагога-математика, видного русского методиста, прекрасного популяризатора математики, известного далеко за пределами нашей страны, замечательного лектора, увлекавшего своих слушателей стройностью и строгостью изложения, яркими иллюстрациями сложных математических понятий, суждений и построений, лаконичными умозаключениями. 43 года проработал Фёдор Фёдорович в Кировском государственном педагогическом институте имени В.И. Ленина, завоевав своей деятельностью признательность и уважение студентов, которых он обучал, преподавателей-коллег, учителей математики. Имя Ф.Ф. Нагибина известно не только в границах СНГ, но и далеко за пределами России и бывших республик СССР.

Фёдор Фёдорович Нагибин родился 17 февраля (1 марта) 1909 г. в деревне Корпухино Великоустюгского района Вологодской области. Его мать была батрачкой, отца он не знал. Детство его было тяжелым, голодным и безотрадным. Тяжелый труд, которым занимался Федя с раннего детства, наложил свой отпечаток на характер ребёнка. Чтобы выжить, надо было проявлять твёрдость духа, высокую требовательность к себе и другим, строгость и силу воли.

[1] Текст с небольшими изменениями перепечатан из книги: Проблемы современного математического образования в вузах и школах России. Материалы IV Всероссийской научно-методической конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Ф.Ф. Нагибина. Киров, 2009.

Ф.Ф. Нагибин

В 1927 г. Ф.Ф. Нагибин окончил Великоустюгский педагогический техникум и начал свою педагогическую деятельность учителем начальной школы села Папулово Лальского района ныне Кировской области. Затем работал учителем математики семилетки в Лальске.

В 1930 г. поступил на физмат Кировского государственного педагогического института им. В.И. Ленина, который окончил в 1933 г. Был приглашён профессором П.Д. Белоновским и работал ассистентом на кафедре математики этого института.

В 1936–1938 гг. учился в аспирантуре по методике преподавания математики при НИИ средней школы Наркомпроса РСФСР. Его руководителями были: по математике – известный в мире учёный, профессор МГУ, член-корреспондент АН СССР Александр Яковлевич Хинчин, по методике преподавания математики – известный математик-методист Елизавета Савельевна Березанская. В 1939 г. Фёдор Фёдорович успешно защитил кандидатскую диссертацию в МГПИ им. В.И. Ленина. Тема диссертации: «Вопросы изучения функций в курсе математики средней школы».

В 1941 г. ВАК утвердила Ф.Ф. Нагибина в учёном звании доцента, а в 1968 г. – в учёном звании профессора.

До конца своей жизни профессор Ф.Ф. Нагибин работал в одном институте – Кировском государственном педагогическом: ассистентом, доцентом, зав. кафедрой, деканом физмата, директором института, профессором.

Супруга Фёдора Фёдоровича Эмилия Иосифовна Барташек была дочерью И. Барташек, директора Кировского завода «Физприбор» № 2, члена ВКП(б), немца по национальности. Эмилия Иосифовна окончила в 1933 г. физико-математический факультет Кировского государственного педагогического института им. В. И. Ленина и долгие годы работала учителем математики в средней школе № 29 г. Кирова. Знающий, хорошо подготовленный учитель, она быстро приобрела опыт преподавания математики в школе, длительное время руководила районным методическим объединением учителей математики.

Дети Фёдора Фёдоровича и Эмилии Иосифовны, Олег и Ольга, оба получили высшее образование. Олег Фёдорович, горный инженер, работал сначала на Дальнем Востоке, затем в Кемеровской области (г. Прокопьевск), долгие годы в одном из Ленинградских НИИ. У него есть сын. Ольга Фёдоровна после окончания института уехала в Белоруссию и жила в Минске. В её счастливом семействе родились 4 сына.

Фёдор Фёдорович был талантливым, эрудированным лектором по математике и методике её преподавания. Он умел доходчиво, но в то же время достаточно строго разъяснять студентам сложные понятия математического анализа, теории функций действительного переменного, теории аналитических функций. Увлекательно излагал профессор Нагибин историю математики, чётко и образно высказывал свои идеи по вопросам преподавания математики.

Велик вклад профессора Ф.Ф. Нагибина в подготовку научно-педагогических кадров. С 1953 г. Фёдор Фёдорович руководил аспирантурой по методике преподавания математики. Его ученики – автор этих строк профессор Е.С. Канин, кандидаты наук и доценты А.И. Жаворонков, Н.Г. Килина, М.Г. Лускина, В.С. Семаков, А.П. Шихова – долгие годы работали в КГПИ им. В.И. Ленина. Выпускники аспирантуры Ф.Ф. Нагибина работали и в других педвузах: Л.Г. Ярославцева в Перми, А.П. Югринова в Тюмени, Г.И. Лобастов в Липецке и др. Все они продолжали дело своего научного руководителя.

Много времени уделял Ф.Ф. Нагибин научно-методическим исследованиям. Основные направления его исследований: 1) общая методика обучения математике; 2) методика обучения алгебре и началам анализа; 3) методика обучения геометрии; 4) обучение решению математических задач; 5) развитие мышления и творчества учащихся в процессе обучения математике.

Регулярные публикации исследований Ф.Ф. Нагибина осуществлялись всю его жизнь и несколько лет после его кончины. Удалось разыскать 92 его прижизненные работы, 12 работ были опубликованы его учениками в 1977–2006 гг. Профессор Нагибин – автор (соавтор) 32 учебников и учебных пособий для школ, задачников и книг для учителей математики, многих книг для учащихся. 39 его статей опубликованы в центральных изданиях, в том числе 29 статей в журнале «Математика в школе». Работы Ф.Ф. Нагибина издавались на 9 языках народов мира (13 изданий) в том числе в Японии (2 издания), в Китае, в Болгарии.

Надо отметить, что учебник геометрии коллектива авторов (Ф.Ф. Нагибин, А.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов «Геометрия: Учебник для 6–8 классов») на всесоюзном конкурсе в 1964 г. получил вторую премию (первая премия не была присуждена никакому учебнику). Он был издан издательством «Просвещение» в 1967 г. (объем 384 с.).

Высокий уровень научно-методических исследований профессора Ф.Ф. Нагибина, успешно включавшиеся в научные исследования под его руководством аспиранты, широкие научные связи Фёдора Фёдоровича, а также создаваемые профессором Нагибиным и его учениками авторские коллективы по подготовке и изданию результатов исследований по методике преподавания математики явились базой для **научно-методической школы «Теория и методика обучения решению математических задач»**. Эта школа имела большое влияние на подготовку кадров вузовских преподавателей методики математики, исследователей в этой области. Результаты работы такой научной школы публиковались как в различных местных и центральных изданиях, так и за пределами страны. К работе в авторских коллективах привлекались не только математики-методисты, но и «чистые» математики.

В результате в рамках «школы» были подготовлены и изданы несколько книг: Н.Г. Килиной «Сборник задач по методике преподавания математики» (Киров, 1976), Е.С. Канина «Алгебраические упражнения в восьмилетней школе» (Киров, 1973) и «Алгебраические упражнения, 6 класс» (М.: Просвещение, 1976), Е.С. Канина, Е.М. Каниной, М.Д. Чернявского «Упражнения по началам математического анализа (М.: Просвещение, 1986), В.С. Семакова «Применение учебно-наглядных пособий и технических средств обучения на уроках математики» (М.: Высшая школа, 1972), М.Г. Лускиной «Элементы теории рядов на факультативных занятиях в школе» (Киров, 1976), два сборника статей «Математические упражнения» (Киров, 1975, 1976), а также сборники «Задачи как средство обучения алгебре и началам анализа в IX классе» (Киров, 1980), «Задачи как средство обучения алгебре и началам анализа в 10 классе» (Киров, 1985).

«Костяк» «школы» Нагибина составляли Н.Г. Килина, Е.С. Канин, М.Г. Лускина, В.С. Семаков. Именно они вошли в авторский коллектив учебного пособия для вузов «Методика преподавания математики. Общая методика» (М.: Просвещение, 1985).

«Школа Ф.Ф. Нагибина» продолжала свою деятельность и после его кончины, последовавшей в 1976 г. В 1977 г. вышел сборник «Задачи и упражнения по началам математического анализа» (составители С.И. Калинин и Е.С. Канин), ещё дважды издававшийся в Москве издательством «Московский лицей». Результаты своих исследований под влиянием «школы Нагибина» в виде книги «Учебные математические задачи» опубликовал в 2003 г. Е.С. Канин (второе издание – в 2004 г.). Ряд статей о методике задач опубликовали «школьники» в центральных изданиях, прежде всего в журнале «Математика в школе» (6 статей).

Всего же в рамках «школы» изданы и опубликованы 9 книг, 9 диафильмов (в студии «Союздиафильм»), 16 статей в журнале «Математика в школе», статьи в других центральных и местных изданиях, а это более 100 работ (не считая работ самого Ф.Ф. Нагибина).

Хотел бы особо выделить книгу для учащихся **«Математическая шкатулка»**, которая выдержала 14 изданий, в том числе переведена на японский, китайский, украинский, молдавский, киргизский, татарский и башкирский языки, издана для слепых. Последнее издание (Ф.Ф. Нагибин, Е.С. Канин «Математическая шкатулка». М.: Дрофа, 2006) существенно отличается от предыдущих и содержит 1050 интересных и занимательных задач для увлечённых математикой учащихся (с решениями или указаниями к ним). Общий тираж этой книги более 2 миллионов экземпляров. Книга «живёт» уже более 50 лет (первое издание вышло в 1958 г. в издательстве «Просвещение»).

Известны и другие книги Ф.Ф. Нагибина, написанные специально для учащихся. Ф.Ф. Нагибин вёл большую общественную работу. Помимо того, что он постоянно читал лекции для учителей и учащихся, он ещё в 1948–1952 гг. был заместителем председателя президиума Кировского областного общества «Знание», в 1951–1954 гг. – членом Кировского обкома Союза работников высшей школы и научных учреждений, в 1968–1973 гг. работал в областном Комитете защиты мира.

За свой многолетний поистине титанический труд Фёдор Фёдорович Нагибин награжден орденом «Знак Почёта», медалью «За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.», юбилейной Ленинской медалью, значком «Отличник народного просвещения РСФСР», грамотой Президиума Верховного Совета РСФСР, другими многочисленными знаками и грамотами.

Вернуться к содержанию

Геометр Яков Петрович Понарин (1934–2008)[1]

Евгений Михайлович ВЕЧТОМОВ
зав. кафедрой высшей математики Вятского государственного гуманитарного университета
vecht@mail.ru

Вера Ивановна ВАРАНКИНА
доцентн кафедры высшей математики Вятского государственного гуманитарного университета

Игорь Соломонович РУБАНОВ
завуч Центра дополнительного образования одарённых школьников г. Кирова

Василий Владимирович ЧЕРМНЫХ
профессор кафедры высшей математики Вятского государственного гуманитарного университета

Совсем[1] недавно он приходил в университет. Вспоминается образ немного грузного пожилого человека в очках. В последнее время он ходил с палочкой. В нём сразу виделась неординарность: сохранившаяся с детства деревенская непосредственность и искренность удивительно сочетались со старательно поддерживаемым в одежде образом учёного-интеллигента – строгий коричневый костюм, плащ и подобранный в тон к нему берет. Заразительный смех и открытое проявление всех эмоций, нетерпимость к несправедливости. С ним было интересно как с большим ребёнком, для которого мир всегда оставался загадкой. Любовь к жизни и людям – это все о нём.

Яков Петрович Понарин родился 29 октября 1934 года в деревне Шишкино Лебяжского района Кировской области. С 1943 по 1950 год учился в семилетней школе села Мелянда Лебяжского района. Затем поступил в Нолинское педагогическое училище, которое окончил в 1954 году. Он с удовольствием вспоминал то время – голодное, но интересное. В педучилище получил разностороннее образование, научился играть на домре, писать плакатным пером и ещё многому другому из того, что необходимо знать и уметь сельскому учителю. После окончания педучилища проработал учителем Мысовской семилетней школы своего родного района в течение года.

В 1955 году Я.П. Понарин поступил на физико-математический факультет Кировского государственного педагогического института имени В.И. Ленина. Учился отлично, с удовольствием помогал однокурсникам в учёбе и в организации разных дел. Много занимался общественной работой. Был секретарём комсомольской организации факультета и редактором факультетской стенной сатирической газеты «Зоркий глаз», на страницы которой так боялись попасть нерадивые студенты. За высокие результаты в учёбе и успехи на общественном поприще Яков сначала получал моло-

[1] Текст с небольшими изменениями перепечатан из «Математического вестника педвузов и университетов Волго-Вятского региона» (вып. 11, 2009 г.).

товскую, а затем комсомольскую стипендию. Любопытно, что в 50-е годы прошлого века сталинская стипендия равнялась 780 рублям, молотовская – 580, обычная – 220, повышенная – 275, комсомольская и профсоюзная стипендии были по 400 рублей. Тогда при средней в стране зарплате в 500 рублей студенту на именную стипендию вполне можно было жить. В это время на институт приходилось 5 сталинских, 50 молотовских и по одной комсомольской и профсоюзной стипендий. Учились на физико-математическом факультете хорошо. Физмат регулярно получал 13 молотовских стипендий, 1 сталинскую, обе – комсомольскую и профсоюзную стипендии.

Я.П. Понарин

В Кировском пединституте судьба свела Якова с сокурсницей Анной, ставшей его женой на пятом курсе, с замечательными людьми – четой Каниных, будущим геометром Е.В. Потоскуевым, известным теперь философом математики, заслуженным профессором МГУ В.Я. Перминовым.

После окончания вуза в течение года работал учителем математики и черчения Сосновской средней школы Вятско-Полянского района Кировской области.

В 1961 году Я.П. Понарин поступил в очную аспирантуру на кафедру геометрии Кировского пединститута к профессору Н.А. Колмогорову (1896–1965), который заведовал кафедрой и руководил аспирантурой по геометрии с 1947 года до конца своих дней. Сам Н.А. Колмогоров, защитивший кандидатскую диссертацию в Ростовском университете в 1939 году, и все его ученики занимались геометрией тетраэдра. Из 18 аспирантов защитилась одна Н.М. Фёдорова. (В дальнейшем несколько по другой тематике защитили кандидатские диссертации Я.П. Понарин и Е.В. Потоскуев, также ставший впоследствии профессором.) Будучи аспирантом, Яков Петрович выполнил две важные работы по геометрии тетраэдра, которые затем опубликовал [18, 19].

После окончания аспирантуры в 1964 году Я.П. Понарин был распределён на работу, как тогда полагалось, в другой вуз – в Коми пединститут на кафедру алгебры и геометрии, на которой проработал в должности старшего преподавателя, доцента и заведующего до середины 1970 года. Защитил кандидатскую диссертацию «Геометрия симплекса в некоторых пространствах Клейна» 6 марта 1968 года в Учёном Совете Ярославского государственного педагогического института имени К.Д. Ушинского. Научным консультантом был известный геометр, доктор физико-математических наук, профессор З.А. Скопец. Высшей аттестационной комиссией СССР 10 апреля 1970 года Я.П. Понарину было присвоено ученое звание доцента по кафедре геометрии и топологии.

За шесть лет работы в Сыктывкаре Яков Петрович привлёк к занятиям наукой ряд студентов и преподавателей математических кафедр пединститута, также защитивших позднее диссертации. Многие из коллег стали его друзьями на всю жизнь. Среди них тогдашние преподаватель А.Г. Порошкин и студент В.А. Попов. Под влиянием Я.П. Понарина В.А. Попов поступил в аспирантуру Ленинградского пединститута, защитил кандидатскую диссертацию по функциональному анализу, стал специалистом по теории меры, заведовал кафедрой математического анализа и был проректором по учебной работе Коми пединститута. Профессор А.Г. Порошкин до сих пор преподаёт математический анализ в Сыктывкарском университете. Оба – авторы многочисленных учебных пособий по математике для студентов и школьников.

С 1970 по 1984 год Я.П. Понарин работал в Запорожском пединституте, сначала в должности доцента кафедры математики, а затем заведующим кафедрой алгебры и геометрии. В это время он много внимания уделял научной и методической работе, привлечению преподавателей и студентов к исследованиям. Определил тему кандидатской диссертации преподавателю кафедры Г.П. Недогарок и был её неофициальным соруководителем. В соавторстве с З.А. Скопецом издал две книги [1, 2]. Писал статьи и учебные пособия по геометрии.

В 1984 году Яков Петрович возвратился в родной Кировский пединститут, где и работал все последние годы. До апреля 2002 года на кафедре геометрии (кафедрой руководил доцент И.С. Рубанов), а затем до осени 2008 года на кафедре алгебры и геометрии, переименованной в 2006 году в кафедру высшей математики (заведующий кафедрой Е.М. Вечтомов). В это время в полной мере проявился его талант вузовского преподавателя и методиста. Знаменательным событием стало присвоение Я.П. Понарину учёного звания профессора по кафедре геометрии, утвержденного Государственным Комитетом СССР по народному образованию 4 июля 1991 года.

Характерной чертой творчества профессора Я.П. Понарина было сочетание геометрических исследований с глубокой методической проработкой материала, порой неотделимых друг от друга. Яков Петрович – классический геометр, один из последних в нашей стране. Даже в элементарной геометрии он находил новые факты и связи. Являлся тонким задачным композитором, в 16 номерах журнала «Математика в школе» им опубликованы новые геометрические задачи [68].

Математические интересы Я.П. Понарина как учёного-геометра начались с геометрии симплекса (в частности, тетраэдра) в евклидовых и неевклидовых пространствах. По результатам исследований в этой области им защищена кандидатская диссертация [28], опубликовано 11 работ, написана монография «Геометрия тетраэдра и его элементов» [1]. Затем он переключился на исследования в области проективной и аффинной геометрий и неевклидовых геометрий с аффинной базой, в результате чего опубликовано 9 статей и книги [4, 5, 16]. В последние десять лет творчества Яков Петрович обобщил два результата Гаусса из элементарной геометрии [59, 61], решил одну задачу Гаусса [67], продолжил работу по своей излюбленной теме геометрических преобразований [55, 58], применил метод барицентрических координат к решению планиметрических и стереометрических задач [54, 56, 60, 62], занимался геометрической интерпретацией основных понятий математической статистики [12, 64]. Интенсивно трудился над учебниками по геометрии, предназначенными школьникам и студентам, учителям и вузовским преподавателям.

Научное наследие Я.П. Понарина составляет 68 опубликованных работ общим объёмом более 200 печатных листов. Оно включает в себя монографию [1], 16 учебников и учебных пособий [2–17], серьёзные математические статьи [18–22, 25, 30, 38–40, 44, 48, 49, 55, 61, 64, 67], две статьи в журнале «Квант» [34, 50], 11 материалов (не считая задач [68]) в журнале «Математика в школе» [32, 33, 36, 37, 41, 42, 47, 51–53, 57]), важные математико-методические статьи [32–34, 36, 48–52, 54–62, 65], работы о математическом образовании [31, 35, 41–43, 46, 47].

Венцом творчества и настоящим памятником ему стал его трёхтомник «Элементарная геометрия». Предыдущие издания по элементарной геометрии [6, 10, 11] пользуются большой популярностью у студентов и школьников, а его классический учебник по планиметрии [10] служит одним из основных учебных пособий в физико-математических школах России. В Московском центре непрерывного математического образования вышел учебник «Аффинная и проективная геометрия» [16], готовится к печати книга «Конструктивная геометрия» [17]; корректуру последней он подписал за несколько дней до кончины.

Я.П. Понарин сделал около сотни научных и методических докладов на Всесоюзных, Всероссийских, зональных и вузовских конференциях и семинарах. В педагогической деятельности его отличали бескорыстная заинтересованность, очевидное неравнодушие, обостренное чувство справедливости, жёсткая принципиальность. Неоднократно рецензировал кандидатские диссертации, книги, сборники и статьи. По поручению Ученого методического Совета Министерства просвещения СССР в 1980–1981 годы анализировал и рецензировал пробные учебники геометрии для средней школы, выступал с докладами на заседаниях Совета.

Я.П. Понарин постоянно и успешно руководил научной работой студентов: кружками по геометрии, научно-исследовательскими группами, курсовыми и дипломными работами. Под его руководством защищено около 70 дипломных работ по геометрическим и методическим темам. С сильными студентами он занимался индивидуально. Благодаря его наставничеству избрали свой путь в науку и стали вузовскими преподавателями несколько студентов и сотрудников математических кафедр Коми, Запорожского и Кировского пединститутов.

Я.П. Понарин – прекрасный вузовский педагог. Его занятия отличались логичностью, стройностью и чёткостью, высоким научным уровнем. Он не любил повторяться, постоянно искал новое, модифицировал и совершенствовал свои курсы. Большинство разделов основного курса геометрии читал в оригинальном изложении, используя интересные методические находки. Особый вкус имел к решению геометрических задач, который стремился привить студентам. Добивался самостоятельности и полной осмысленности знаний у студентов. Практические занятия проводил на пределе возможной трудности задач, что поначалу вызывало недовольство студентов, сменявшееся впоследствии их благодарностью.

За годы работы в вузах Яков Петрович разработал и прочитал авторские спецкурсы «Геометрия тетраэдра», «Флаговая геометрия», «Квадратичные преобразования», «Конечные проективные плоскости», «Геометрические приложения комплексных чисел» и другие. Подготовил и провел спецсеминары «Векторный метод в геометрии», «Решение геометрических задач методом преобразований», «Неевклидова геометрия с аффинной базой», «Аффинная геометрия», «Избранные вопросы элементарной геометрии», «Избранные вопросы стереометрии».

В 1995 году было создано 10 региональных Учебно-методических объединений (УМО) по математике на базе различных педвузов России во главе с Ярославским госпедуниверситетом. Центром Волго-Вятского УМО стал наш педуниверситет, его председателем назначен профессор Я.П. Понарин, а заместителем – профессор Е.М. Вечтомов. Яков Петрович участвовал в двух совещаниях председателей региональных Советов УМО в Ярославле и Волгограде, провёл пять заседаний Совета УМО по математике педвузов Волго-Вятского региона – трижды в Кирове (1996, 1997 и 1998 годы), в Чебоксарах (1999) и Арзамасе (2000). Последний раз Я.П. Понарин участвовал в заседаниях Совета УМО в Глазове осенью 2003 года, но и в дальнейшем рецензировал поступающие в УМО учебные пособия по геометрии на предмет присвоения им грифа Волго-Вятского УМО.

При его активной поддержке с 1998 года в нашем университете стал выходить периодический межвузовский сборник «Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона». Я.П. Понарин был членом редколлегии первых четырёх выпусков сборника, сам опубликовал на его страницах 9 прекрасных статей [55, 56, 58–62, 64, 65]. Сейчас «Математический вестник» широко востребован, реферируется в реферативном журнале «Математика» ВИНИТИ РАН.

Я.П. Понарин всегда проявлял заинтересованность в общественных делах и воспитательной работе. Был секретарем партбюро математического факультета в Коми и Запорожском пединститутах, ответственным за учебно-воспитательную работу, куратором учебных групп. Долгие годы возглавлял учебно-методическую комиссию математического факультета нашего вуза. Состоял членом жюри математической олимпиады школьников г. Кирова, вел занятия в физико-математическом лицее и школе юных математиков Кировской области. Регулярно выступал с лекциями перед учителями в г. Кирове и районах области.

Как настоящий профессионал своего дела, Яков Петрович Понарин всегда был востребован. Работал председателем государственной экзаменационной комиссии по математике в Винницком, Бердянском, Черниговском, Глазовском и Кировском педагогических институтах. Являлся рецензентом украинских издательств «Радянська школа» и «Вища школа», членом Ученого методического Совета Министерства просвещения СССР (1978–1980 годы).

Главным для него всегда была работа, научное и методическое творчество, обучение и воспитание студентов, развитие математического образования. Награждён медалью «Ветеран труда» и значком «Отличник народного просвещения», отмечен рядом почетных грамот и благодарностей за свой труд. В 2006 году за учебник по элементарной геометрии получил научную премию ВятГГУ.

Я.П. Понарин имел разносторонние интересы и увлечения. Долгие годы играл на домре в Кировском городском оркестре народных инструментов, много раз со своими музыкальными номерами принимал участие и в факультетских отчётных концертах художественной самодеятельности. Коллеги часто обращались к нему с просьбой переплести потрепавшиеся от времени книги, это он делал мастерски и с любовью. Он не считался с личным временем, и за несколько дней переплетал в нужном количестве только что подготовленные к защите диссертации. Молодёжь он искренне любил. С отеческой заботой интересовался о делах, искренне радовался успехам, старался дать добрый совет. Любил компанию. Никогда не отказывался принять участие в очередной посвящённой какому-нибудь событию встрече. С удовольствием общался, произносил тосты, привнося в эти встречи незабываемый колорит. Его любовь к жизни имела разные проявления – дальние поездки на велосипеде (например, от Кирова до Сыктывкара и обратно), садово-огородные дела.

До последнего дня он сохранял творческую активность, на все сто оправдывая звание профессора. Его девизом было – «Писать по странице в день!» А страница математического текста – это очень существенно.

Сохранился текст небольшого нигде неопубликованного интервью Якова Петровича студентам. Здесь хорошо слышится его речь. На вопрос: «А почему переплётом книг начали заниматься?» Яков Петрович ответил: «Удовлетворение моральное. Да и отдых. Отключение от умственной работы. Голову же не отключишь как телевизор: на кнопку нажал и всё. В голове если задача какая-нибудь сидит, то попробуй – выкинь её. А вот переплёт – смена труда и отдых». Якову Петровичу был задан ещё один, своего рода философский, вопрос: «Когда человека можно считать счастливым?». На что Яков Петрович ответил: «М-да. Ну, конечно, не в материальном смысле. Есть люди материально богатые, но не счастливые. Счастье – быть полезным, нужным для людей. Если кому-то нужен, это очень хорошо. Сейчас на факультете много преподавателей – моих бывших студентов. С ними постоянно общаюсь и с дипломниками. Это очень приятное, хорошее общение. В таком общении я тоже вижу счастье. Так, например, с женой как-то шли по улице, и девушка с противоположной стороны подошла к нам: "Здравствуйте, Яков Петрович. Я вот специально к Вам подошла. Хочу узнать как Вы? Как у Вас дела?" Специально подошла. Значит, помнит. Значит, хорошего мнения обо мне. Это же очень приятно».

«Получается, Вы – счастливый человек?» – «Да, безусловно».

За неделю до своей смерти Яков Петрович позвонил Е.М. Вечтомову, сказал, что все свои авторские дела завершил, и не знает, что делать дальше. Каждый человек имеет определённое предназначение, должен нести свой крест. Наверное, в этом и состоит смысл жизни. Яков Петрович Понарин нашёл своё призвание, всю жизнь посвятил народному образованию. И, несмотря на одолевавшие его болезни, до конца работал. Полностью осуществил своё земное предназначение.

У Якова Петровича остались жена Анна Петровна, младший сын, врач-невролог Дмитрий Яковлевич (старший сын Андрей Яковлевич умер в 1997 году, он работал директором кировской школы № 70) и внуки Вадим и Михаил.

Все мы потеряли доброго коллегу и товарища, заботливого учителя, классного геометра, прекрасного автора, неустанного труженика, настоящего человека.

Список научных и методических трудов Я.П. Понарина

Книги

1. Геометрия тетраэдра и его элементов. – Ярославль: Верхне-Волжское книжное изд-во, 1974. 15 п.л. (в соавторстве с З.А. Скопецом).

2. Перемещения и подобия плоскости.– Киев: Радянська школа, 1981. 10 п.л. (в соавторстве с З.А. Скопецом).

3. Решение геометрических задач векторным методом. – Запорожье: Запорожский пед. ин-т, 1982. 3,75 п.л. (в соавторстве с Г.П. Недогарок).

4. Аналитическая геометрия проективной плоскости. – Киров: Кировский пед. ин-т, 1988. 8 п.л. Рекомендовано Министерством просвещения СССР в качестве учебного пособия для студентов педагогических институтов по специальности 2104 Математика.

5. Неевклидовы геометрии с аффинной базой. – Киров: Кировский пед. ин-т, 1991. 5 п.л.

6. Геометрия для 7–11 классов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 1977. 31,7 п.л.

7. Изображение фигур в параллельных проекциях. – Киров: Вятский гос. пед. ун-т, 1999. 5 п.л.

8. Преобразования пространства. – Киров: Вятский гос. пед. ун-т, 2000. 5 п.л.

9. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. – М.: МЦНМО, 2004. 10 п.л.

10. Геометрия: планиметрия, преобразования плоскости. – М.: МЦНМО, 2004. 19,5 п.л.

11. Геометрия: стереометрия, преобразования пространства. – М.: МЦНМО, 2006. 16 п.л.

12. Геометрическое введение в математическую статистику. – М.: МЦНМО, 2006. 4 п.л. (в соавторстве с Л.А. Тиминым).

13. Элементарная геометрия. Т. 1. – М.: МЦНМО, 2008 (2-е изд.). 19 п.л.

14. Элементарная геометрия. Т. 2. – М.: МЦНМО, 2008 (2-е изд.). 16 п.л.

15. Элементарная геометрия. Т. 3 (геометрия треугольника и тетраэдра). – М.: МЦНМО, 2009. 14 п.л.

16. Аффинная и проективная геометрия. – М.: МЦНМО, 2009. 18 п.л.

17. Конструктивная геометрия. – М.: МЦНМО, 2009. 12 п.л.

Статьи и тезисы

18. Зависимость между дефектами граней тетраэдра в гиперболическом пространстве // Труды физико-математического факультета Кировского педагогического института. – Киров, 1964 (1965). 0,5 п.л.

19. Об описанных сферах и сферах, касающихся плоскостей граней тетраэдра в пространстве Лобачевского // Труды физико-математического факультета Кировского педагогического института. – Киров, 1964 (1965). 1,81 п.л.

20. Метрические соотношения в прямоугольном симплексе и круге в пространстве Лобачевского // Ученые записки Кировского пединститута. Вып. 23. – Йошкар-Ола, 1965. 0,31 п.л.

21. Применение векторной алгебры четырехмерных евклидовых векторов к выводу некоторых тождеств для пространств постоянной кривизны // Ученые записки Кировского пединститута. Вып. 23. – Йошкар-Ола, 1965. 0,41 п.л.

22. О гиперболических синусах тетраэдра и пентаэдроида в пространстве Лобачевского // Известия вузов. Математика. 1965. № 4. 0,75 п.л.

23. Аффинные свойства n-мерного симплекса и косого многоугольника // Материалы II Коми респ. Научной молодежной конф. Коми филиала АН СССР. – Сыктывкар, 1967. 0,13 п.л.

24. О сферах во флаговом пространстве // Материалы II Коми респ. Научной молодежной конф. Коми филиала АН СССР. – Сыктывкар, 1967. 0,19 п.л.

25. О кремоновых преобразованиях плоскости, возникающих в связи с проективным обобщением теоремы Шлемильха // Ученые записки Ярославского пединститута. Вып. 61. Геометрия. – Ярославль, 1967. 0,41 п.л.

26. Полярное соответствие относительно симплекса // Научная конф, посвященная 50-летию советской власти. – Сыктывкар: Коми пед. ин-т, 1967. 0,07 п.л.

27. n-мерные аналоги теоремы косинусов и теоремы Пифагора // Материалы 26 конф. матем. кафедр techинститутов Урала. – Киров: Кировский пед. ин-т, 1968. 0,06 п.л.

28. Геометрия симплекса в некоторых пространствах Клейна. Автореферат дисс. ... кандидата физ.-мат. наук. – Ярославль: Ярославский пед. ин-т, 1968. 1 п.л.

29. Конечная абелева группа гармонических гомологий, определяемых симплексом // Материалы III Коми респ. Научной молодежной конф. Коми филиала АН СССР. – Сыктывкар, 1969. 0,07 п.л.

30. Расположение центров и точек касания сфер, касающихся граней тетраэдра // Ученые записки Кировского пединститута. Вып. 30. – Казань: Казанский ун-т, 1969. 0,33 п.л.

31. Решение задач как средство развития творческих способностей учащихся // Сб. «За прочные математические знания». – Сыктывкар: Коми. ИУУ. Коми книжное изд-во, 1969. 0,94 п.л.

32. Сферы, касающиеся граней тетраэдра // Математика в школе. 1970. № 1. 0,33 п.л.

33. Построение двумерной флаговой геометрии на основе систем аксиом Вейля // Математика в школе. 1975. № 1. 0,63 п.л.

34. Вычисление площадей // Квант. 1976. № 7. 0,38 п.л.

35. Пути усовершенствования содержания учебников геометрии для 6–7 классов // Материалы научно-практической конф. Украинской ССР. Луцк: Украинский НИИ педагогики, 1976. 0, 2 п.л.

36. Преобразования подобия плоскости // Математика в школе. 1979. № 3. 0,7 п.л.

37. Работать в одном направлении // Математика в школе. 1979. № 5. 0,06 п.л.

38. Проективное построение аффинной теории векторов // Депонировано в ВИНИТИ 26.02.80 № 714-80 ДЕП. 1,13 п.л.

39. Построение трехмерной флаговой геометрии на основе системы аксиом Вейля // Депонировано в ВИНИТИ 22.03.82 № 1252-82 ДЕП. 1,2 п.л.

40. Векторно-аксиоматическое построение геометрии псевдоизотропного пространства // Депонировано в УкрНИИНТИ 06.08.86 № 1854-Ук86. 0,94 п.л. (в соавторстве с П.Г. Степанцевой).

41. Изучаем и обсуждаем программу // Математика в школе. 1986. № 5. 0,1 п.л.

42. Межвузовская научно-практическая конференция по внеклассной работе // Математика в школе. 1987. № 2. 0,15 п.л. (в соавторстве с Е.С. Каниным).

43. Методические основы учебного труда студента-математика. Киров: Кировский пед. ин-т, 1988. 0,5 п.л.

44. Аналитическая геометрия изотропного пространства // Депонировано в ВИНИТИ 19.01.90 № 407-В90 ДЕП. 0,88 п.л.

45. Об основаниях некоторых неевклидовых геометрий // Научно-методической конф. преподавателей матем. кафедр, посвященной 75-летию КГПИ. – Киров: Кировский пед. ин-т, 1990. 0,06 п.л.

46. Курс «Основы учебного труда» // Тезисы докл. и сообщ. научно-методической конф. преподавателей матем. кафедр, посвященной 75-летию КГПИ. – Киров: Кировский пед. ин-т, 1990. 0,06 п.л. (в соавторстве с И.С. Рубановым).

47. О концепции школьного математического образования // Математика в школе. 1990. № 4. 0,33 п.л. (в соавторстве с Е.С. Каниным).

48. Метод комплексных чисел в решении геометрических задач // В книге «Скопец З.А. Геометрические миниатюры. – М.: Просвещение, 1990». С. 152–169.

49. Прямая и окружность на плоскости комплексных чисел // В книге «Скопец З.А. Геометрические миниатюры. – М.: Просвещение, 1990». С. 170–179.

50. Гармонический четырехугольник // Квант. 1991. № 10. 0,3 п.л.

51. Метод комплексных чисел в планиметрии // Математика в школе. 1991. № 2. 0,75 п.л.

52. Задача одна – решений много // Математика в школе. 1992. № 2. 0,2 п.л.

53. Книга по искусству решения геометрических задач // Математика в школе. 1997. № 2. 0,25 п.л.

54. Метод центра масс и барицентрические координаты в курсе геометрии пединститута // Проблемы современного математического образования в педвузах и школах России. Межрегиональная науч. конф. – Киров: Вятский пед. ун-т, 1998. 0,07 п.л.

55. О неподвижных точках и классификации подобий // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 1998. Вып. 1. С. 14–19.

56. Критерий окружности по барицентрическому уравнению линии второго порядка // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 1998. Вып. 1. С. 78–82.

57. Равновеликие тетраэдры и объем клина // Математика в школе. 1998. № 6. 0,4 п.л.

58. Движения евклидова пространства // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 2000. Вып. 2. С. 121–132.

59. Ортогональная проекция тетраэдра // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 2001. Вып. 3. С. 47–49.

60. Основные метрические задачи планиметрии в барицентрических координатах // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 2002. Вып. 4. С. 114–132.

61. Два обобщения теоремы Гаусса о полном четырехугольнике // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2003. Вып. 5. С. 52–59.

62. Метод барицентрических координат в метрических задачах стереометрии // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2004. Вып. 6. С. 189–200.

63. О книге «Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах» // Проблемы современного математического образования в педвузах и школах России. III Всероссийская науч. конф. – Киров: ВятГГН, 2004. 0,15 п.л.

64. О геометрическом изложении математической статистики // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2005. Вып. 7.

С. 138–148 (в соавторстве с Л.А. Тиминым).

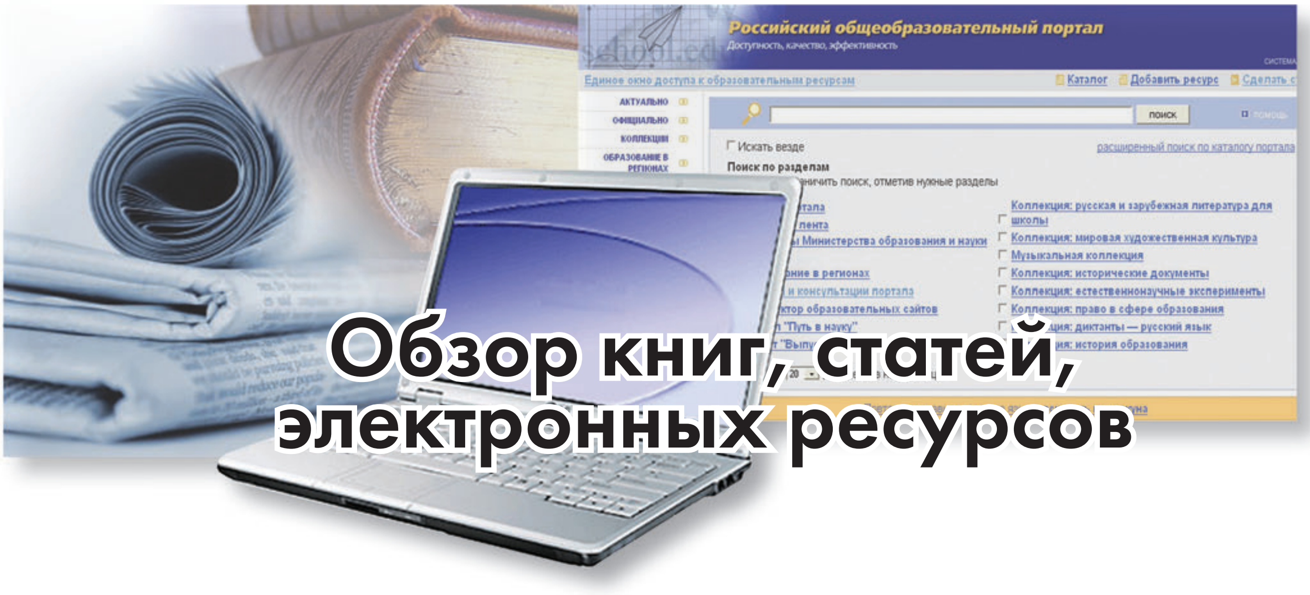
65. Косой параллелограмм // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2006. Вып. 8. С. 218–224 (в соавторстве с В.В. Громазиным).

66. О новой книге по элементарной геометрии // Проблемы подготовки учителя математики к преподаванию в профильных классах. Материалы XXV Всероссийского семинара преподавателей математики университетов и педвузов. – Киров: ВятГГУ, 2006. 0,15 п.л.

67. Решение задачи Гаусса о зависимости ортогональных проекций вершин тетраэдра // Математическое просвещение. 2007. 0,2 п.л.

68. Новые геометрические задачи // Математика в школе. 1967. № 5. Задача 420; 1977. № 5. 1905; 1979. № 5. 2176; 1980. № 1. 2219; 1980. № 4. 2276; 1980. № 5. 2300; 1981. № 1. 2339; 1981. № 3. 2380; 1981. № 4. 2395; 1982. № 1. 2454; 1982. № 2. 2479; 1982. № 3. 2495; 1982. № 4. 2520; 1983. № 2. 2587; 1983. № 3. 2616; 1983. № 4. 2635.

Вернуться к содержанию



Обзор книг, статей, электронных ресурсов

Книги И.А. Кушнира. Личный опыт

Дмитрий Викторович ПРОКОПЕНКО
учитель математики физико-математической школы № 2007 г. Москвы
prokop@biochip.ru

Летом 2007 года мне в руки «попалась» книга «Альтернативные способы решения задач. Геометрия»[1] с рекомендацией, что должно быть интересно. В Москве книги этого автора не издавались, поэтому фамилия на обложке тогда мне ни о чём не говорила. Открываю. Доказательство свойств вертикальных углов восемью способами. Зачем, ведь такая простая теорема? Непонятно. Смотрим дальше. Средняя линия треугольника, доказательство не по учебнику. Неожиданное, я такое не встречал. А вот это уже интересно. Читаю дальше. Угол между хордами. И тоже не по учебнику. Ещё интереснее! Зачем обсуждать такую простую теорему? Казалось бы, запомнили факт и пошли дальше. Но ведь решение начинается со слов «Проведём хорду, параллельную данной хорде *AB*». А ведь это, пожалуй, самое трудное для обычного школьника – сделать дополнительное построение. А если мы решим задачу (пусть даже хорошо известную) или докажем обычную школьную теорему несколькими способами, мы как раз и будем учиться делать дополнительные построения. (Потом, встретив знакомую конструкцию, ученик уже знает с чего можно начать, нет растерянности перед новой задачей.)

Например, теореме о средней линии трапеции посвящено четыре страницы и 12 способов доказательства. При этом изучены все основные способы, дополнительные построения в трапеции, использованы векторы. Всё это закладывает фундамент для успешного решения задач в дальнейшем.

[1] *Кушнир И.А.* Альтернативные способы решения задач. Геометрия. – Киев: Факт, 2006.

Книгу «Альтернативные способы...» удобно использовать на дополнительных занятиях в старших классах. Примерно год назад я решил провести занятие по трапеции для группы десятиклассников с большими пробелами в геометрии. Сначала предложил три задачи средней сложности минут на 10. Как и ожидалось, решений не было. После этого раздаю распечатки из книги на эту тему и предлагаю разобраться. Каждые 5–7 минут обсуждаем на доске новый способ. Можно выбрать 6–7 способов, включая векторный. После этого опять предлагаю решить задачи. Теперь уже есть результаты. Причём для решения достаточно было просто выбрать подходящий рисунок из распечатки. Для закрепления предлагаю доказать теорему по готовым чертежам, не заглядывая в текст.

Год назад ко мне подошла ученица девятого класса с просьбой дать ей тему для реферата по геометрии. Я вёл в её классе практикум по решению задач, геометрии там было немного, поэтому её возможностей я не знал. Чтобы с чего-то начать, нужны были задачи не очень сложные, но содержательные. Поэтому я дал ей распечатки из книги «Альтернативные способы...» на темы «Ортотреугольник» и «Теорема трилистника». Написаны эти разделы блестяще, особенно теорема трилистника, которая стала «фирменным знаком» Исаака Аркадьевича. После этого мы несколько раз обсуждали прочитанное. Потом недели 2–3 новостей не было, и я решил, что интерес потерян и реферата уже не будет. К моему удивлению, оказалось, что ученице настолько понравилось, что она по собственной инициативе нашла в интернете две статьи И.А. Кушнира (его книг в Москве до сих пор нет), изучила их и решила задачи. Статьи, как говорят, «зацепили». А это, мне кажется, главное. По этим материалам и был написан реферат.

Эта история имела неожиданное продолжение. Осенью 2009 года Исаак Аркадьевич прочитал в Москве три лекции: на семинаре по геометрии им. И.Ф. Шарыгина, в Московском центре непрерывного математического образования, для школьников и для учителей. После замечательной лекции мы подошли к И.А. Кушниру и показали реферат, написанный целиком по его статьям. Он был приятно удивлён, поставил автограф со знаменитым трилистником. Конечно, всё это произвело сильное впечатление на школьников. Одно дело – читать книжки и совсем другое – увидеть выступление автора вживую. Например, представляя одну задачу, которая имела короткое неожиданное решение, Исаак Аркадьевич произнес: «Я поехал бы за этой задачей даже на Дальний Восток». С таким эмоциональным подъёмом написаны и его книги.

На этом месте хотелось бы отвлечься и спросить: «Для школьников польза от решения задач разными способами очевидна, а что это даёт учителям?». Большинство задач из книги «Альтернативные способы...» хорошо известны. Например, формула Лагранжа длины биссектрисы. Её не только полезно знать, но она ещё красива и сама по себе. Я её помню, умею применять – что ещё требовать от формулы? Тогда под влиянием книги я попробовал придумать своё доказательство. И довольно неожиданно для меня – получилось. Из этого доказательства я придумал задачу, которая была использована в заочном туре олимпиады по геометрии им. И.Ф. Шарыгина 2009 года. Для себя я сделал вывод, что интересная задача содержит в себе больше, чем результат, формулу. Это скорее целая конструкция, её жалко сразу отпускать, хочется с ней повозиться, посмотреть, а что будет, если провести вот такую прямую, а вдруг эти точки лежат на одной окружности и т.д. *Нельзя ограничиваться одним решением. Это не так интересно.*

На лекции Исаака Аркадьевича для школьников в Москве я сказал, что знаю доказательство формулы Лагранжа, которого нет в книге. Реакция была мгновенной – я тут же получил маркер в руки: «К доске!». После лекции я прокручивал в голове доказательство много раз. Что-то меня не устраивало, построения казались искусственными и громоздкими. Недели через две я придумал другое, используя уже стандартное для биссектрисы дополнительное построение. Проверил – в книге «Альтернативные способы...» такого способа не было! И опять свежий взгляд принёс результат – есть ещё четыре задачи на одну конструкцию, в которых нет ни слова про биссектрису!

Немало интересного можно найти и в других книгах И.А. Кушнира. А каковы названия его книг! Например, «Триумф школьной геометрии» или «Геометрия на баррикадах». Вот некоторые названия глав и разделов: «Молнии в равнобедренном треугольнике», «Теорема трилистника – самая эмоциональная теорема», «Сенсационная находка геометрических археологов», «Единственная и неповторимая», «Прямая, без которой нам не жить», «Моя любовь – треугольник».

Книги И.А. Кушнира эмоциональны, их интересно читать, с ними хочется спорить, вести диалог. Остаётся только выразить искреннее восхищение талантом Исаака Аркадьевича, вкусом к красивым задачам, умению в простом видеть интересное и умению показать это обычным школьникам, учителям, слушателям, читателям.

Вернуться к содержанию

Конспект семинара учебно-исследовательских работ школьников по математике

Наталья Михайловна НЕТРУСОВА
учитель математики школы-интерната
«Интеллектуал» г. Москвы
natnetint@gmail.com

Алексей Иванович СГИБНЕВ
учитель математики школы-интерната
«Интеллектуал» г. Москвы
sgibnev@mccme.ru

На девятом заседании семинара (22.09.2009) ***Г.Б. Шабат*** сделал доклад на тему **«Основания аффинной планиметрии»**.

Определения и обозначения

Введём обозначения: $\mathbb{P}=\{\text{точки}\}$, $\mathbb{L}=\{\text{прямые}\}\subset sub(\mathbb{P})$.

Пусть $l, m\in\mathbb{L}$. Введём понятие параллельности:

$$l\parallel m :\Leftrightarrow l\cap m=\varnothing$$

и понятие параллельности в широком смысле:

$$l \parallel\!| m :\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} l\parallel m \\ l=m \end{array}\right.$$

Упражнение. Доказать, что $\parallel\!|$ – отношение эквивалентности (в отличие от $\parallel$).

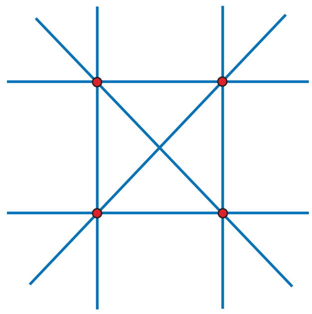
Пусть для множеств $\mathbb{P}$ и $\mathbb{L}$ выполняются I и V постулаты Евклида. Введём три операции и обозначения для них:

1) прямую, проходящую через точки P и Q, обозначим $P^{\bullet}Q$ (должно быть $P\neq Q$);
2) точку пересечения двух прямых l и m обозначим $l_{\bullet}m$ (должно быть $l \nparallel m$);
3) прямую, проходящую через точку P параллельно прямой l, обозначим $P\,!\,l$.

Упражнение. Перечислить и осознать свойства этого формализма, например:

$P^\bullet Q = Q^\bullet P,\ \ P \in P^\bullet Q$, и т.д.

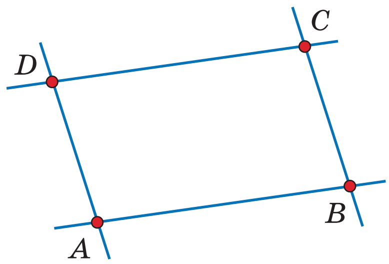
Пример 1:



$\mathbb{L}$ здесь – это все возможные двухэлементные подмножества $\mathbb{P}$. (Диагонали здесь не пересекаются, так как в центре точки нет!)

Параллелограммы

Определение. Четвёрку точек с определённым циклическим порядком называют параллелограммом, если обе пары противоположных сторон параллельны: $A^\bullet B \parallel C^\bullet D,\ \ B^\bullet C \parallel A^\bullet D$.



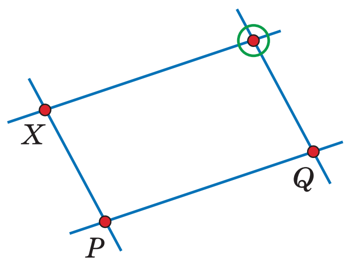
В примере 1 много параллелограммов!

Упражнение. Перечислите все параллелограммы, содержащиеся в примере 1. Проверьте, что во всех $A^\bullet C \parallel B^\bullet D$ (диагонали параллельны).

Упражнение. Докажите, что если диагонали пересекаются в каком-то параллелограмме, то пересекаются и во всех параллелограммах.

Движения

Движения – это язык геометрии. Параллелограммы дают запас движений плоскости. Для точек $P, Q \in \mathbb{P}$ определим сдвиг $P^{\to}Q$: $\ P \to Q$.



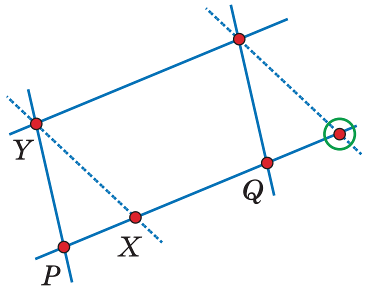
В виде формулы сдвиг $P^{\to}Q$, применённый к точке X, выглядит так:

$[P^{\to}Q](X) := [X!(P^\bullet Q)]_\bullet [Q!(P^\bullet X)]$.

(Подразумевается, что $P \neq Q, X \notin P^\bullet Q$.)

Упражнение. Почему прямые $X!(P^{\bullet}Q)$ и $Q!(P^{\bullet}X)$ пересекаются?

А что делать, если $X \in P^{\bullet}Q$? Рассмотрим произвольную точку $Y \in \mathbb{P} \setminus (P^{\bullet}Q)$. Построим сдвиг согласно рисунку:



Упражнения.

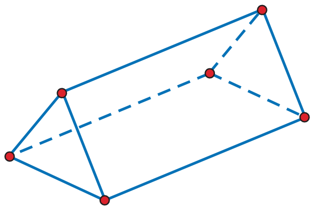
1. Запишите $[P^{\to}Q](X)$ в виде выражения от P, Q, X, Y.

2. Проверьте экспериментально в «Живой геометрии», что $[P^{\to}Q](X)$ не зависит от точки Y, т.е. что операция сдвига определена корректно.

3. Докажите это преобразованием выражения.

Пункты 2 и 3 можно сформулировать в виде **Леммы о палатках:**

Если два четырёхугольника на рисунке – параллелограммы, то и третий – тоже параллелограмм.



Лемма о палатке НЕ следует из постулатов I и V. Она эквивалентна дезарговости плоскости[1].

Проект. Предъявите недезаргову плоскость.

В заключение заметим, что у Евклида около 10 аксиом, а у нас – всего 2. Поэтому это очень благодарная тема для того, чтобы научиться ясно видеть основы и выводить из них следствия.

На десятом заседании семинара (20.10.2009) ***Г.Б. Шабат*** сделал доклад на тему **«Проективная плоскость»**.

1. *Связь с теорией перспективы.*

Перед рисующим человечеством давно стояла задача плоского изображения пространственного предмета. Решали её по-разному. Например, русские иконописцы придерживались правила «Что дальше – то выше» – и это нормальное соглашение.

[1] См. конспект семинара, опубликованный в № 3 журнала «Полином» за 2009 г.

2. *Связь проективной плоскости со сферической геометрией.*

Проективная плоскость $\mathbb{P}_2(\mathbb{K}) := \{$прямые в $\mathbb{K}$ через $(0, 0, 0)\}$, где $\mathbb{K}$ – поле (тело).

Таким образом, $\mathbb{P}_2(\mathbb{K}) := \mathbb{S}^2$ с условием, что антиподальные точки отождествляются.

Сферическая геометрия очень богата. В школьном курсе она представлена только в виде геометрии трёхгранных углов.

Проект. Перенести стандартные факты геометрии треугольника на сферическую геометрию.

Эксперименты в сферической геометрии трудны, а на плоскости Лобачевского – легки. Так вот, оказывается, всё равно, какой геометрией заниматься. Геометрия с положительной и отрицательной кривизной едина. А вот в геометрии нулевой кривизны есть вырождения (например, на евклидовой плоскости существуют подобные, но не равные треугольники).

3. *Связь проективной и аффинной геометрий.*

$\mathbb{P}_2 := \mathbb{A}^2 \bigcup' l_\infty$ – множество точек аффинной плоскости + множество точек «бесконечной прямой», где $\bigcup'$ означает непересекающееся объединение, а l_∞ – «бесконечная прямая», т.е. $l_\infty := \mathbb{L}/\|\|$ – каждая точка l_∞ задаёт направление.

$\mathbb{P}_2^* := \mathbb{L} \bigcup' \{l_\infty\}$ – множество прямых аффинной плоскости + бесконечная прямая.

Давайте доопределим операции $l_\bullet m$ и $P^\bullet Q$.

$\forall l, m \in \mathbb{P}_2^*\ (l \neq m)\ l_\bullet m \in \mathbb{P}_2$:

• если $l, m \in \mathbb{L}$ и $l \bigcap m$, то $l_\bullet m :=$ точка пересечения этих прямых (определяется как в аффинной плоскости);

• если $l, m \in \mathbb{L}$ и $l \| m$, то $l_\bullet m :=$ соответствующая точка прямой l_∞;

• если $m \in \mathbb{L}$, а $l = l_\infty$, то $l_\bullet m :=$ соответствующая m точка прямой l_∞.

Заметим, что на проективной плоскости эффект параллельности преодолён: теперь любые две прямые имеют общую точку (если они параллельны – то лежащую на «бесконечной прямой»).

$\forall P, Q \in \mathbb{P}_2\ (P \neq Q)\ P^\bullet Q \in \mathbb{P}_2^*$:

• если $P, Q \in \mathbb{A}_2$, то $P^\bullet Q :=$ прямая, проходящая через эти точки (определяется как в аффинной плоскости);

• если $P \in \mathbb{A}_2$, а $Q \in l_\infty$, то $P^\bullet Q :=$ прямая, проходящая через точку P параллельно направлению, заданному точкой Q;

• если $P, Q \in l_\infty$, то $P^\bullet Q := l_\infty$.

Так строится переход от аффинной плоскости к проективной. Обратный переход осуществляется выбрасыванием произвольной прямой проективной плоскости (т.е. усложнением системы).

4. *Аксиоматика.*

Запишем аксиомы проективной плоскости:

$$\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \setminus \Delta \to \mathbb{P}_2^* : \quad (P, Q) \to P^{\bullet}Q$$
$$\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2^* \setminus \Delta \to \mathbb{P}_2 : \quad (l, m) \to l_{\bullet}m$$ [2]

Две последние строчки полностью симметричны друг другу. Чтобы подчеркнуть это равноправие, для отношения $P \in l$ ввели специальный термин «инцидентность». Тогда на естественном языке эти утверждения будут звучать так: «Для любых двух точек существует прямая, им инцидентная» и «Для любых двух прямых существует точка, им инцидентная». Заметим, что если поменять местами слова «точки» и «прямые» в первом утверждении, то получится второе, и наоборот. *Если в любом верном утверждении на проективной плоскости поменять местами слова «точки» и «прямые», то также получится верное утверждение.* Это называется принципом двойственности.

Пример (классический). Двойственность теорем Паскаля и Брианшона (см., например, Р. Курант, Г. Роббинс «Что такое математика?», М., 2004. С. 236):

Теорема Паскаля	Теорема Брианшона
Если вершины шестиугольника лежат поочерёдно на двух прямых, то точки пересечения противоположных сторон коллинеарны.	Если стороны шестиугольника проходят поочерёдно через две точки, то прямые, соединяющие противоположные вершины, конкуррентны.

Проект. Реализовать эту двойственность в геометрии, т.е. отыскать пары двойственных теорем.

Можно сказать, что на проективной плоскости есть всего одна аксиома – первый постулат Евклида + Принцип двойственности.

5. $\mathbb{P}_2^*$ *как группоид* (категория, где все морфизмы обратимы).

Рассмотрим две прямые l и m и точку $P \notin l \cup m$. Произвольной точке $Q \in l$ сопоставим точку $m_{\bullet}(P^{\bullet}Q)$. Назовём полученное отображение отображением проектирования.

Задача «3 в 3». Построить систему отображений, переводящих 3 данные точки прямой l в 3 данные точки прямой m. (Аналогичная задача «2 в 2» решается мгновенно.) Рассмотреть также эту задачу на одной прямой.

На одиннадцатом заседании семинара (17.11.2009) ***Г.Б. Шабат*** сделал доклад на тему **«Учение о поляре»**.

Принцип двойственности

Он имеет следующее литературное описание.

Слепой иностранец. Представьте, что на семинар по проективной геометрии попал слепой иностранец. Он не знает значения слов «точка» и «прямая», и не может их увидеть. Поэтому что из них что – он выбирает наугад. Но как бы он ни выбрал – все теоремы проективной геометрии будут читаться правильно!

---

[2] $\Delta := \{(P, P)\}$ – диагональ. То есть запись $\setminus\Delta$ в первой строчке означает, что $P \neq Q$, а во второй – что $l \neq m$.

Исходя из принципа двойственности, хочется построить отождествление между множеством точек $\mathbb{P}_2$ и множеством прямых $\mathbb{P}_2^*$.

Заметим, что множеству $\mathbb{P}_2^*$ можно поставить в соответствие множество плоскостей, проходящих через точку (0, 0, 0). Тогда пересечение каждой из этих плоскостей с плоскостью $z = 1$ соответствует прямой из $\mathbb{P}_2^*$, а плоскости $z = 0$ соответствует бесконечная прямая. Точке из $\mathbb{P}_2$ сопоставим прямую, проходящую через эту точку и начало координат. Бесконечной точке соответствует прямая из плоскости $z = 0$. (Подробнее см., например, Р. Курант, Г. Роббинс «Что такое математика?», М., 2004. С. 219–222.)

Тогда элементы $\mathbb{P}_2$ и $\mathbb{P}_2^*$ можно отождествить следующими способами.

1) Пусть есть метризация. Тогда есть и перпендикулярность. Отождествим плоскость и прямую, перпендикулярную ей, проходящие через начало координат. Получим отождествление прямой и точки на проективной плоскости.

2) Поляра. На проективной плоскости зафиксируем окружность. Пусть внутри окружности дана точка M. Построим соответствующую ей прямую следующим образом. Проведём прямую k через точку M, в точках пересечения её с окружностью проведём касательные. Они пересекаются в точке P. Теперь будем поворачивать прямую k. Геометрическим местом точек P окажется прямая – её и сопоставим точке M (см. рис.).

Схема доказательства того, что получится именно прямая. Осуществим отображение, переводящее окружность в себя, а точку M – в её центр. В этом случае указанное построение приведёт к прямой – l_∞. Значит, и в общем случае получится прямая.

Вопрос: какая прямая соответствует точке P?

Следующий пункт также имеет отношение к отождествлению прямых и точек.

Где пересекаются все окружности?

Рассмотрим уравнение окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Перепишем его в однородных координатах: $(x - az)^2 + (y - bz)^2 = r^2z^2$. Заметим, что этому уравнению при любых a, b, r удовлетворяют точки $(x, y, z) = (1; \pm i; 0)$. Это значит, что все окружности проходят через эти две точки.

Паскаль доказал, что любое коническое сечение определяется **пятью** точками. Так вот, окружность проходит через **две** точки $(1; \pm i; 0)$ и через какие-то ещё **три** точки.

Проект. Как классифицировать планиметрические теоремы (общеизвестные и новые) – т.е. существуют ли они в проективной геометрии?

Это можно отслеживать как по явной формулировке, так и по доказательству (использование координатного метода). Например, теоремы о трёх медианах, о трёх высотах, о трёх биссектрисах – существуют, так как они являются частными случаями теоремы Чевы.

Вернуться к содержанию

Информация

Указатель статей, помещённых в журнале «Полином» в 2009 году

Из истории математики

Г.А. Зверкина. Знакомьтесь: циркуль. – № 3. С. 4–19.

А.А. Касьян. История математики и идеология (Горьковский университет, середина XX века). – № 2. С. 4–9.

Г.И. Синкевич. Старинные польские задачи. – № 4. С. 4–10.

Из истории просвещения

В.М. Бусев. Перелистывая страницы журнала: очерк истории «Математики в школе». – № 3. С. 20–29; № 4. С. 30–37.

Г.В. Кондратьева. Репетиторство в XIX веке. – № 1. С. 4–9.

Г.В. Кондратьева. Циклическая периодизация истории школьного математического образования. – № 3. С. 30–39.

Ю.М. Колягин, О.А. Саввина. Обзор архивных документов из личного фонда профессора Николая Васильевича Бугаева. – № 1. С. 18–21.

Н.А. Курдина, Н.П. Тайфёрова, Т.К. Каменева. Очерки истории Пермской школы № 9 (1809–2009). – № 4. С. 11–29.

Т.С. Полякова. Периодизация истории отечественного математического образования. – № 1. С. 10–17.

Живая история

Н.Н. Андреев. Воспоминания о Сергее Борисовиче Стечкине. – № 3. С. 40–45.

Дети 1920-х годов о своих знаниях (публикация и предисловие *В.М. Бусева*). – № 3. С. 46–52.

А.П. Карп. Об А.Р. Майзелисе. – № 4. С. 38–45.

Г.А. Клековкин. Первый профессор (о Ф.Ф. Нагибине). – № 4. С. 46–47.

В.И. Сушков. Воспоминания о Константине Устиновиче Шахно. – № 2. С. 10–21.

А.П. Чехов. Репетитор. – № 1. С. 28–29.

Э.Э. Шноль. Мой учитель – И.М. Гельфанд. – № 1. С. 22–27.

Вокруг математики

А.Г. Мякишев. Треугольные фракталы. – № 2. С. 28–38.

А.И. Сгибнев. Исчисление змей для начинающих. – № 3. С. 63–67.

И.А. Посов. Задачи «Освещение города» и «Свет в лабиринте» на конкурсе КИО. – № 4. С. 48–53.

Г.Б. Шабат, Л. Лепихова, Н. Шиндовски, А. Шабат. Двуквадратные числа. – № 3. С. 53–62.

Г.Б. Шабат, А.И. Сгибнев. Простые делители оберквадратов. – № 1. С. 30–36.

Г.Б. Шабат, А.И. Сгибнев. Формула Эйлера и теорема Понселе. – № 2. С. 22–27.

Учим математике

Большакова Г.Н., Карпова Т.Н., Мурина И.Н., А.В. Ястребов. Очерки по методике преподавания стохастики (Часть 1). – № 4. С. 54–76.

А.В. Егоров. Рефлексия как средство формирования мотивов учения (из опыта работы). – № 2. С. 45–50.

А.Р. Майзелис. Из записок старого учителя. – № 4. С. 84–93.

К.В. Медведев. Опыт фронтального ведения курсовых работ школьников. – № 1. С. 52–54.

Н.М. Нетрусова. Организация исследовательской деятельности школьников в школе «Интеллектуал». – № 1. С. 55–58.

И.Б. Писаренко. Обучение с помощью серий задач. – № 2. С. 39–44.

Д.В. Прокопенко. Из опыта работы кружка по геометрии. – № 3. С. 68–76.

М.А. Ройтберг. Игра в полоску. – № 1. С. 37–46.

М.А. Ройтберг. Любите ли вы математику как я люблю ее? Игра «Попробуй реши!». – № 2. С. 51–58.

П.А. Самохвалов. Введение понятия несоизмеримости в V классе (публикация *О.А. Саввиной*). – № 1. С. 47–51.

А.И. Сгибнев. Монолог и диалог в обучении математике. – № 4. С. 79–83.

А.И. Щетников. «Живая» доска Гальтона. – № 4. С. 77–78.

А.И. Щетников. «Площади и объёмы»: краткое описание учебного курса. – № 3. С. 77–80.

Задачи

С.А. Беляев. Задачи по математике: «простушки», «ловушки» и «неберушки». – № 4. С. 99–105.

А.В. Карлюченко, И.В. Михайлик, Г.Б. Филипповский, Л.А. Харченко, А.А. Шамович, С.В. Яковлев. XIV Открытая олимпиада по математике Русановского лицея. – № 3. С. 93–106.

А.Г. Мякишев. О восстановлении треугольника по пересечениям его чевиан с описанной окружностью. – № 3. С. 86–92.

Новые задачи. – № 3. С. 81; № 4. С. 95.

Д.В. Прокопенко, П.В. Чулков. Об отделе «Задачи». – № 4. С. 94.

Решения задач, помещённых в № 2 за 2009 год. – № 3. С. 82–85.

Решения задач, помещённых в № 3 за 2009 г. – № 4. С. 96–98.

О.А. Файнштейн. О задачном отделе журнала «Полином». – № 2. С. 59–60.

Г.Б. Филипповский. Прелюбопытный равнобедренный треугольник. – № 2. С. 61–64.

Г.Б. Филипповский. Франсуа Виет и геометрия. Теорема косинусов. – № 4. С. 106–111.

Размышления

Г.В. Дорофеев. Математика и интеллектуальное развитие школьников. – № 2. С. 65–71.

А. Пуанкаре. Математические определения и преподавание. – № 3. С. 107–115.

В.В. Фирсов. Методика обучения математике как научная дисциплина. – № 1. С. 59–67.

Дискуссия

В.М. Бусев. Новые педагогические культы и будущее школьной математики. – № 1. С. 68–84.

В.В. Фирсов. Подводные камни ЕГЭ. – № 3. С. 123–132.

Д.Э. Шноль. ЕГЭ по математике и реальный уровень математического образования современных школьников. – № 3. С. 116–122.

Математики-педагоги

В.М. Бусев. Методист-математик Дмитрий Лукич Волковский (к 140-летию со дня рождения). – № 1. С. 85–92.

В.И. Варанкина, Е.М. Вечтомов, И.С. Рубанов, В.В. Чермных. Геометр Яков Петрович Понарин (1934–2008). – № 4. С. 116–125.

Е.А. Горин, П.В. Семёнов, А.С. Симонов. Леонид Моисеевич Лихтарников. – № 2. С. 72–77.

Е.С. Канин. Профессор Фёдор Фёдорович Нагибин (к 100-летию со дня рождения). – № 4. С. 112–115.

О.А. Саввина, В.А. Телкова. Двойной юбилей — академии и академика. – № 3. С. 133–140.

В.А. Тестов. С.Г. Губа — учёный-методист. – № 2. С. 77–79.

Обзор книг, статей, электронных ресурсов

В.М. Бусев. О книге «Математики тоже шутят». – № 3. С. 82–83.

События

Информация

Вернуться к содержанию