ПОЛИНОМ

№2 2009

НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Читателю и автору

Журнал «Полином» является научно-методическим журналом, ориентированным на широкую аудиторию лиц, имеющих отношение к преподаванию математики: учителей, методистов, преподавателей и учащихся педвузов, историков образования.

Основная цель журнала — знакомить читателей с исследованиями в области теории и практики обучения математике, работами по истории математики и истории математического образования.

Название журнала — «Полином» — выбрано неслучайно. За словом «полином» скрывается не только математический объект, рациональная функция, но нечто большее. Слово «полином» происходит от греческого πολυς — многочисленный, обширный и латинского nomen — имя, т.е. фактически «полином» означает «много имен». Такое толкование тесно связано с основной задачей журнала: собирать на своих страницах «много имен», много статей из разных уголков страны и мира в целом.

Каждый желающий может предложить свой текст для публикации в журнале. Основные требования, которым должен удовлетворять текст: 1) быть потенциально интересным для читателей; 2) быть представленным в электронном виде (только текстовый редактор Word). Чертежи желательно изготовлять в программах Corel Draw или Adobe Illustrator (чтобы редактору не приходилось делать рисунки заново).

Журнал является бесплатным, гонорары авторам не выплачиваются.

На электронные ресурсы, как и на бумажные, необходимо ссылаться при цитировании. ГОСТ 7.0.5–2008 разъясняет, как организованы ссылки на электронные издания. Ориентируясь на требования, сформулированные в ГОСТе, можно предложить следующий вид ссылки на статью, опубликованную в электронном журнале «Полином»:

Иванов И.И. К вопросу о преподавании математики [Электронный ресурс] // Полином. 2009. № 1. С. 2–8. URL: http://www.mathedu.ru/polinom/polinom2009-1.pdf (дата обращения: 12.01.2009).

Полином

Научно-методический журнал
№ 2/2009

Выходит 4 раза в год

Учредитель и редактор
В. М. Бусев

Ведущий отдела задач
О. А. Файнштейн

Художник
О. П. Богомолова

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций Российской Федерации
Эл. № ФС77-34064

СОДЕРЖАНИЕ

Задачи

Размышления

Математики-педагоги

Обзор книг, статей, электронных ресурсов

События

Информация

От редактора

Первый номер журнала «Полином» делать было не только трудно, но и немного страшно: а вдруг он окажется никому не нужным, и саму идею электронного журнала придется оставить? С тех пор, как первый номер был выложен на сайт, прошло почти 4 месяца. За это время поступил ряд положительных откликов, которые дают основание надеяться, что журнал движется в правильном направлении и будет востребован. Статистика скачиваний показывает, что первый номер прочли более 1500 человек — неплохой результат для издания, которое только-только возникло.

Вместе с положительными откликами высказывались некоторые замечания, в основном технического характера. Что касается содержания, то в целом оно нареканий не вызвало. Был отмечен академический уклон журнала. По этому поводу замечу, что содержание номеров зависит не только от редактора, но и от авторов. Если практических материалов будет больше, чем пока удается найти редактору, это будет хорошо.

Второй номер журнала «Полином» составлен в основном аналогично первому. Обращу внимание на одно существенное новшество: с этого номера в журнале будет регулярно вестись отдел задач (см. с. 59–60). Насколько он будет востребован, покажет время. Опыт дореволюционных и советских периодических изданий для учителя математики позволяет с уверенностью сказать, что при правильной постановке дела задачный отдел привлекает к себе читателей. Будем надеяться, что отдел задач журнала «Полином» сможет сплотить вокруг себя любителей задач.

Небольшое техническое новшество — система закладок, которая позволяет легко перемещаться по номеру, не используя оранжевые стрелки (в Adobe Acrobat они доступны на вкладке Bookmarks).

Для удобства читателей и просто посетителей сайта http://www.mathedu.ru на этом сайте организована информационная рассылка. Подписавшись на нее на главной странице, можно регулярно получать сведения о новых поступлениях в электронную библиотеку и о выходе новых номеров журнала «Полином».

Редакция ждет ваших статей и задач для третьего номера журнала.

Срок подачи — **до 1 июля 2009 г.**

Редактор В.М. Бусев

Из истории математики

История математики и идеология (Горьковский университет, середина XX века)

КАСЬЯН Андрей Афанасьевич
профессор кафедры философии
Нижегородского государственного
педагогического университета
anauka@yandex.ru

В конце 40-х – начале 50-х гг. XX века в Советском Союзе в ряде наук проходили дискуссии, имевшие широкий общественный отклик: в философии (1947), в биологии (1948), в языкознании (1950), в физиологии высшей нервной деятельности (1950), в химии (1951), в политической экономии (1951). Эти дискуссии нельзя определить как чисто научные. Было бы неверно квалифицировать их и как чисто идеологические. Самое точное их определение – *научно-идеологические дискуссии*. Причем в каждой из них соотношение науки и идеологии было различным.

Названные дискуссии можно считать главными. Помимо них в отечественной науке в это время происходили события, также имевшие научно-идеологический характер, но менее масштабные, локальные. Происходили они не только в «центре» (Москва, Ленинград...), но и «на местах».

Отмеченные события (главные и неглавные) по-разному оценивались в нашей исторической и философской науке. Очевидно, что пришла пора спокойного, взвешенного, объективного осмысления как главных, так и локальных событий, происходивших в советской науке и имевших научно-идеологический характер[1].

[1] Такая попытка нами предпринята, см.: Идеология и наука: дискуссии советских ученых середины XX века / Отв. редактор А.А. Касьян. М.: Прогресс-Традиция, 2008.

А.Г. Майер

Ниже будет рассказано об одной дискуссии, имевшей место в Горьковском государственном университете и связанной с именем преподавателя математики *А.Г. Майера*[2].

Еще в 1947 году на закрытом партийном собрании парторганизации ГГУ в выступлении ректора *А.Н. Мельниченко* говорилось, что «доцент А.Г. Майер в своих лекциях по истории математики совершенно не говорит о борьбе материализма и идеализма в науке, не рассматривает диалектическое развитие науки, не говорит об историческом процессе того или иного течения в науке». И в дальнейшем курс истории математики был в поле зрения идеологических структур. История математики — это не дифференциальная геометрия, не вариационное исчисление и тому подобные математические дисциплины. История математики принадлежит исторической науке, это социально-гуманитарная наука. Она объективно ближе сфере политики и идеологии, мировоззренческим вопросам, чем чистая математика. Поэтому и «специалистов» в ней больше. Отсюда и обсуждения, и посещения, и контроль...

Кульминация пришлась на конец 1950 года и начало 1951 года. На Совете физико-математического факультета состоялось заслушивание и обсуждение доклада профессора А.Г. Майера «Предыстория создания математического анализа». Заседания проходили в течение трех дней — 20 и 23 декабря 1950 года и 5 января 1951 года. Первый день — доклад и ответы докладчика на вопросы. Второй день — обсуждение доклада. Третий день — продолжение обсуждения, заключительное слово докладчика, обсуждение проекта решения Совета и принятие решения. Сохранилась обширная стенограмма: доклад — 25 страниц машинописного текста, вопросы и ответы — 14 страниц, заключительное слово — 33 страницы, обсуждение проекта решения Совета — 15 страниц.

Решение Совета включает в себя следующие пункты: «1) Тезисы доклада и доклад проф. Майера “Предыстория создания математического анализа” считать неудовлетворительными. 2) Обязать проф. Майера прежде, чем читать лекции студентам по указанному разделу, переработать к 10 марта 1951 года содержание обсуждаемого доклада в соответствии с задачами курса истории математики, изложенными в программе Министерства и в соответствии с решением Совета факультета, и переработанный доклад сдать через деканат в библиотеку университета для ознакомления. Предложить проф. Майеру коренным образом улучшить качество лекций по истории математики, их идейное содержание. 3) Указать проф. Майеру на недопустимое отношение к критике».

Вскоре после заседания Совета физмата в университетской газете «За сталинскую науку» (от 19 февраля 1951) была опубликована статья «Об идеологических ошибках проф. А.Г. Майера в курсе истории математики». В статье пересказывается решение Совета, излагается критика в адрес преподавателя, прозвучавшая на нем.

[2] Текст основан на материалах Центрального архива Нижегородской области (Ф. 377. Оп. 7. Д. 130, Ф. 377. Оп. 8. Д. 360).

На совещании в ректорате (9 марта 1951 года) в докладе декана физмата доцента *В.И. Беневоленского*, в выступлениях ряда преподавателей и особенно в выступлении ректора А.Н. Мельниченко прозвучала резкая критика в адрес Майера. «В преподавании профессора Майера, — заявил ректор, — вскрыт ряд бесспорных ошибок — и в этом неоценимая заслуга дискуссии на Совете факультета и статьи в газете “За сталинскую науку”. Профессор Майер не обнаружил правильного марксистско-ленинского понимания связи и взаимоотношения теории с практикой, науки с общественной жизнью. Его лекции по истории математики страдают антиисторизмом и недопустимыми элементами космополитизма. Даже одно утверждение профессора Майера, что гениальная теория Лобачевского, якобы, имела все условия появиться во времена Эвклида и не появилась, якобы, только случайно, изобличает теоретическую неграмотность профессора Майера. Мы не можем, профессор Майер, позволить Вам читать курс истории математики, да и другие курсы так, как думаете Вы, потому что думаете Вы неправильно, не по-марксистски». И далее смягчение позиции: «Нет, он старается быть марксистом, но одно дело — стараться, а другое — стать марксистом. Как известно, и Марр (имеется в виду Н.Я. Марр, академик-лингвист. — *Авт.*) старался быть марксистом, но был только грубым вульгаризатором марксизма, и это гениально показал И.В. Сталин... Необходимо усилить контроль за лекциями профессора Майера, контроль сделать систематическим, а не случайным». Подводя итог обсуждению вопроса на этом заседании, ректор высказал пожелание в решение заседания включить такой пункт: «Предложить профессору Майеру читать лекции по написанному и апробированному тексту. Предложить декану доценту Беневоленскому и заведующему кафедрой марксизма-ленинизма доценту Фадееву организовать рецензирование курса лекций профессора Майера по истории математики».

Шапка университетской газеты

С современной точки зрения обсуждения преподавания А.Г. Майером истории математики можно оценить негативно. Вместе с тем, следуя принципу объективности, надо отметить, что «обвиняемому» была предоставлена трибуна, он имел достаточные возможности для изложения собственной позиции, ответов на критику. В защиту позиции А.Г. Майера на заседании Совета физмата выступили некоторые его коллеги. Никаких кадровых решений по результатам всех обсуждений не последовало.

Что касается содержательной стороны дела, то она также неоднозначна. Коснемся лишь двух моментов.

Первое. Основной критик А.Г. Майера — профессор *В.Ф. Котов*, физик. Это главная обвинительная фигура в идеологических дискуссиях, проходивших в ГГУ в те годы. Не будем приводить его общих оценочных высказываний — их неприемлемость бесспорна. Но если говорить о частностях, деталях, то ситуация выступает как многомерная. А.Г. Майер в своем выступлении цитирует В.Ф. Котова: «Идеализм в математике необходимо искать не в специальных методах математики, а в идеологических, философских позициях математиков, в отношении к математике революционных классов и партий. Глубоко реакционными являются философские, идеологические воззрения Евклида, Архимеда, Кавальери и т.д., и в то же время прогрессивными, революционными являются продукты их математического творчества». Это слова В.Ф. Котова. Такой вывод, по мнению А.Г. Майера, — «чудовищный». Если ему следовать, то, по словам А.Г. Майера, получается, что «идеализм в математике является лишь внешним привеском, а взгляды ученого не существенны для результатов его работы».

Налицо две позиции: В.Ф. Котов — надо разделять мировоззренческие, идеологические взгляды ученого и его специально-научные идеи, методы, результаты; А.Г. Майер — мировоззренческие, идеологические взгляды ученого неотделимы от научного познания, вплетены в процесс исследовательской деятельности. Как оценить эти позиции? Каждая из них имеет право на существование. Мировоззренческие идеи связаны с исследовательской деятельностью (постановка проблемы, мировоззренческое предпосылочное знание, круг источников, цели, задачи и т.д.), а, значит, и с ее результатом (знание). Но эта связь далеко не всегда очевидна, она может быть явно или неявно скрыта, завуалирована. Для своего выявления она требует глубокого анализа, непредвзятого отношения к делу, высокого методологического профессионализма. В то же время значительные научные результаты могут быть получены вне прямой связи с мировоззренческой позицией ученого (например, феномен Ньютона).

И второй момент. А.Г. Майер, основываясь на словах И.В. Сталина «Наука, порвавшая связь с практикой, с опытом — какая же это наука?» (источник в стенограмме не указывается), говорит, что «“Начала” Евклида, построенные на отрыве от практики, играли реакционную роль». И далее: «Отвечая реакционной идеологии своего времени (эпохи упадка рабовладельческого общества), “Начала” Евклида вытеснили другие, более ранние и, по-видимому, более прогрессивные “Начала”. Поэтому они остались единственным систематическим изложением древнегреческой математики, донеся нам ее достижения в исковерканном идеализмом виде». Здесь ситуация еще более очевидная. Ведь нелепо требовать однозначного соответствия науки и практики, прямой детерминации научного познания практической деятельностью, как, впрочем, и прямого внедрения результатов научного поиска в практику. Таким образом, при всей жесткости директивных решений, принимаемых в ГГУ, нельзя не отметить, что некоторые из них имели определенные основания.

Научная дискуссия предполагает обсуждение проблем, спокойный, корректный анализ обсуждаемых вопросов, взаимный и свободный обмен мнениями, уважительное отношение к оппоненту. В дискуссиях же тех лет преобладала наступательная, зачастую необоснованная, тенденциозная полемика с односторонним обвинительным уклоном, с элементами поучительства, гипертрофированного представления о значении марксистских идей и установок в ущерб объективности анализа научных проблем. Именно такой подход проявился, например, в выступлении доцента *Маркова*: «...Я думал, что он (Майер. — *Авт.)* одумается, выступит и раскроет свои ошибки. Он этого не сделал... Получается чистой воды идеализм: ученый сидит в кабинете и делает науку. Как развивается наука, и в том числе математика, ясно сказано в истории ВКП(б)!»

Здание университета по ул. Свердлова (ныне Б. Покровская), д. 37.
Начало 50-х гг. XX века

Привнесение в научную дискуссию политических моментов, классового подхода вело к упрощенческому пониманию, вульгаризации методологической функции философии по отношению к другим наукам. Идеологическая обстановка 40–50-х годов характеризовалась противостоянием двух социальных систем. Поэтому упоминания значимости вклада в мировую науку зарубежных ученых часто квалифицировались как «низкопоклонство и раболепие перед Западом», объявлялись космополитизмом. Профессора А.Г. Майера обвинили и в этом. Доцент *Белоусов* заявил: «До сих пор продолжается классовая борьба в науке. Теперь она приняла более ожесточенный характер. Империалисты США, Англии и других стран выступили в роли главных душителей прогрессивных ученых, свободы мысли. США стали ныне центром средневековой мистики, мракобесия. Ни профессор Майер, ни авторы статьи (речь идет об упомянутой статье в университетской газете «За сталинскую науку». – *Авт.)* по непонятным причинам не соизволили увязать преподавание истории математики с той борьбой, которая сейчас развернулась между двумя лагерями: лагерем прогресса, мира и социализма, возглавляемым СССР, и лагерем реакции, войны, возглавляемым США».

Профессора Майера обвинили в недооценке роли геометрии Лобачевского. На это он ответил так: «Значение работ Лобачевского выходит за рамки узко математических работ... Развитие математики не является необходимой предпосылкой развития техники, материального производства, здесь имеет место одностороннее взаимодействие: от производства к теории, а не наоборот. Маркс в “Святом семействе” говорил, что древние греки не имели никакого представления о принадлежности естественных наук к производству. Тезисы о теоретических науках, объясняющих известное, – это перефразирование слов Энгельса о том, что в эпоху до XVIII века задачей естествознания является овладение накопленным материалом. Очень четко и ясно говорил Маркс о том, что в эпоху до крупной промышленности техника производства складывалась эмпирически. Маркс указывал, что только с крупной промышленностью начинается сознательное технологическое использование науки». Эти слова профессора Майера подтверждают то, что он изучал работы основоположников марксизма и имел достаточно высокий уровень философской культуры. Поэтому удивление вызывает упомянутое решение поручить некоторым доцентам осуществлять контроль за его научной и учебной деятельностью, тем более — поучать его.

В заключительном слове на расширенном заседании ректората А.Г. Майер сказал: «Знатоком философии я себя не считаю. Дискуссия мне помогла: заставила прочитать еще раз некоторые труды... У меня создается мнение, что меня не хотят понять». В этом вся суть дискуссии: не стремление к истине, не попытка услышать и понять обсуждаемого, а идеологический критицизм.

Заканчивая наш рассказ, отметим, что рассмотренная история выглядит не одномерной. Ее персонажи не шли одной колонной, имела место определенная разноголосица мнений, хотя все обращались к одному и тому же кругу авторитетов (К. Маркс, Ф. Энгельс, В.И. Ленин, И.В. Сталин). И оценки позиций участников дискуссии не могут быть однозначными, ориентированными на два полюса: «плохой» — «хороший».

Следует отметить также, что во всех обсуждениях преподавания истории математики участвовали только работники физико-математического факультета ГГУ и ректор А.Н. Мельниченко, биолог. Философы в дискуссиях не принимали никакого участия. Это является одним из аргументов против широко распространенного в научных кругах мнения о пагубной роли философов в научно-идеологических дискуссиях в советской науке середины XX века[3].

Дополнение. Биографические сведения об А.Г. Майере

Майер Артемий Григорьевич (1905—1951) — доктор физ.-мат. наук, профессор. Окончил Московский университет (1926), учился в аспирантуре у А.Я. Хинчина (1926–1929). В 1930 г. переехал в Н. Новгород (г. Горький). Доцент Нижегородского пединститута (1930–1931), с 1931 работал в Нижегородском университете; зав. кафедрой математического анализа (1946–1950). Научные работы посвящены качественной теории дифференциальных уравнений и теории нелинейных колебаний, многие из них написаны совместно с академиком А.А. Андроновым. Награжден медалью «За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.».

◄ **Вернуться к содержанию**

[3] Более подробно об этом см.: Философия в российской провинции: XX век / Под ред. А.А. Касьяна. М.: Наука, 2003.

Живая история

Воспоминания о Константине Устиновиче Шахно

СУШКОВ Василий Иванович
старший преподаватель кафедры высшей математики
Санкт-Петербургского государственного политехнического
университета, редактор электронного журнала «Математика в вузе»
mathvuz@mail.ru

Биографические сведения о К.У. Шахно (автор В.К. Шахно)

Константин Устинович Шахно родился 1 января 1909 г. в Санкт-Петербурге в семье служащего. Рано потеряв родителей, с 11 лет воспитывался в детском доме. Затем учился в ветеринарном техникуме, после окончания которого поступил на физико-математический факультет Ленинградского университета (1928), который окончил по математической специальности (1932). Будучи студентом третьего курса, в 1930 г., по рекомендации академика И.М. Виноградова был принят на должность ассистента кафедры высшей математики в Ленинградский политехнический институт (ныне СПбГПУ), где работал до 1942 г. В этом году ушел добровольцем в Красную армию. После демобилизации (1945) работал старшим преподавателем на кафедре математики в Ленинградском электротехническом институте, а затем в Высшем военно-морском инженерном училище ВМФ СССР. В 1957–1984 гг. работал в должности доцента на кафедре математики Ленинградского политехнического института. Умер К.У. Шахно в 1995 г.

Книги К.У. Шахно изданы в СССР суммарным тиражом около 3 миллионов экземпляров. Пособия для поступающих в вузы изданы в Китае и в Чехословакии.

Я работал ассистентом К.У. Шахно несколько лет подряд, с начала моей работы в Ленинградском политехническом институте в 1973 г. после окончания математико-механического факультета ЛГУ. Константин Устинович к тому времени давно был руководителем секции преподавателей математики, ведущих занятия на физико-металлургическом факультете.

К.У. Шахно

Как руководитель он был корректен и доброжелателен. В те годы всем ассистентам полагалось встречаться с лектором официально раз в неделю часа на два для обсуждения текущих дел в группах. Но Константин Устинович обходился разговором в перерывах между занятиями. Это избавляло меня от потери времени на ожидание этих заседаний, что было немаловажно – метро к тому времени проложили только до Финляндского вокзала, дальше надо было долго ехать на автобусе или трамвае, на дорогу в институт я тратил около двух часов. Поэтому я воспринял действия Константина Устиновича (а они шли вразрез с официальным порядком в институте) и как жизненную помощь, и как доверие. А в разговоре почувствовал признание за мной каких-то преподавательских талантов. Поэтому я всегда помнил, что должен оправдать доверие, не подвести шефа.

Что, впрочем, не мешало мне иногда ставить свои эксперименты – пробовать вводить в занятия материал, которого не было на лекциях. За это тогда могли и наказать, ведь студенты некоторых групп были воспитаны в жутком формализме: свято верили, что упражнения должны следовать за лекциями, и бдительно следили за соответствием между практикой и лекциями, и если что не так – «сигнализировали» в деканат, спорить с которым было бесполезно.

Тогда вообще было весьма строго: например, опоздавших на занятия студентов пускать не полагалось. Посещение занятий преподаватели были обязаны отмечать в журнале и расписываться, журнал носил староста. За пропуски занятий студента могли отчислить. Преподавателю за опоздание на несколько минут полагался выговор с занесением в личное дело. Два–три таких выговора давали основание к увольнению по нехорошей статье – за прогулы. И я знаю случаи, когда преподаватели погибали от сердечного приступа из-за спешки на занятия. Я сам видел такого преподавателя, вбежавшего в аудиторию и упавшего замертво. Студенты растерянно стояли в коридоре, а у доски в аудитории лежал труп преподавателя. Ожидали приезда «скорой», которая ничем уже помочь не могла. Вероятно, он еще бы пожил в этом мире, если бы страх опоздать на занятие и быть в том уличенным диспетчером не заставил его перешагнуть границу своих физических возможностей.

В любой корпус тогда можно было войти только раздевшись в гардеробе. Это для многих студентов создавало проблему – они не могли успеть за перерыв перейти из корпуса в корпус с обязательным посещением гардероба – гардеробщики не успевали обслужить. Поэтому некоторые студенты даже оставляли одежду просто на прилавке гардероба. Я помню, как видел в химическом корпусе плачущую студентку, которая из-за проблем с гардеробом не могла успеть на занятия и расстроилась до слез. Я стал ее успокаивать, а у самого сердце кипело злостью на формалистов-администраторов, которые любят дело формой подменять.

Потом, помню, уже в горбачевский период, в аудиториях зимой бывало очень холодно. Я ставил градусник на стол в корпусе у экономистов – плюс пять! Но студентам по приказу ректора полагалось быть на занятиях без пальто. И за нарушение наказывали преподавателей. Бред какой-то. Сам я из-за этого одевался как на лыжную прогулку, и мне у доски было теплее, чем студентам, потому что двигаться можно было сколько угодно.

Это все я добавил к воспоминаниям о К.У. Шахно, как художественную деталь обстановки тех времен.

Я обязан Константину Устиновичу не только доверием и признанием каких-то моих талантов, но и заступничеством от некоторых ретивых руководителей, путавших свою выгоду с пользой для страны. Еще он рекомендовал меня к работе в приемной комиссии летом, что тогда давало ассистенту существенный по его масштабам приработок.

В тот период, в 1970-е годы, громадная разница в возрасте, опыте, чувство служебного этикета держали меня на почтительном расстоянии от Константина Устиновича. Я знал от других математиков старшего возраста, что как ученый-математик Константин Устинович мало что значил, он был известен как замечательный педагог, автор учебников. Но это нисколько не умаляло его достоинств в моих глазах — я отлично понимал, что заслуги педагога могут быть намного выше заслуг ученого.

Более близкое знакомство состоялось одиннадцать лет спустя, в середине 1980-х, когда К.У. Шахно вышел на пенсию, а я частично учил студентов, частично — слушателей подготовительного отделения[1]. Оказалось, что подготовительное отделение находится в нескольких шагах от дома К.У. Шахно. Мы как-то неожиданно встретились, он пригласил меня зайти, и в течение нескольких лет я по его приглашениям стал периодически навещать его дома. Кроме меня было еще несколько человек, которые не забывали навестить К.У Шахно, но я посещал его хоть и не особо часто, но все же чаще всех остальных.

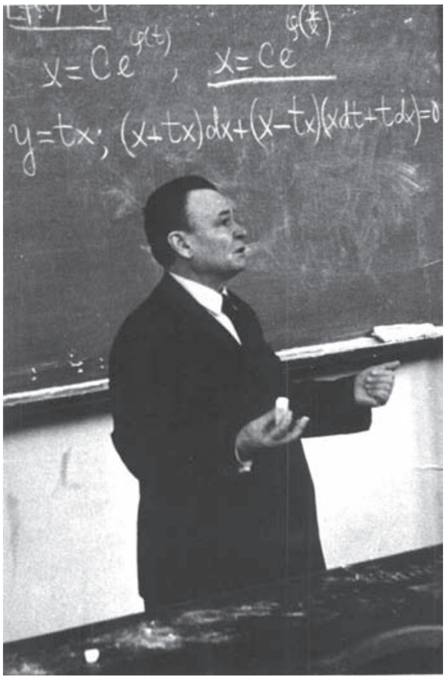
Делегаты конференции ВЛКСМ (1927). К.У. Шахно 4-й справа во 2-м ряду сверху.

[1] Туда принимали только рабочую молодежь, так как власть хотела сохранить в своих рядах рабочий дух, но, как всегда, все у нее пошло формально.

Чем мне запомнился Константин Устинович?

С самого начала нашего знакомства было ясно, что в нем сочетаются высокая культура поведения, человечность и благородство с аккуратностью и требовательностью к себе и к окружающим, скромностью, снисходительностью к недостаткам людей (но не к принципиальным дефектам их душ).

Лекции он читал громким голосом, с отличной дикцией, четко выговаривая все слова, идеально выстраивая мысли и фразы, практически никогда ничего не исправляя и не добавляя, — все было безошибочным с первого раза. Можно сказать, он задиктовывал лекции студентам. В этом он повторял своих учителей — выдающихся преподавателей начала XX века. Он терпеть не мог в других преподавателях расхлябанности, нечеткости, невнятной речи у доски. Студенческие конспекты его лекций напоминали книгу: в них все было аккуратно разбито на главы, параграфы, определения, теоремы, доказательства, иллюстрации, ссылки.



К.У. Шахно читает лекцию

Константин Устинович умел показать ассистенту важность детали, которой молодой преподаватель был склонен пренебречь. Вместе с тем он никогда не играл роль опекуна, ментора. Он заранее давал понять молодому коллеге, что, сколь бы ни была велика разница в возрасте и опыте, он считает его равным себе перед лицом Ее Величества Математики.

К.У. Шахно всегда проявлял деликатность и по отношению к студентам и по отношению к ассистентам. Помню, как-то, помогая ему принимать экзамен, я в беседе со студентом в записи на доске допустил ошибку[2]. Константин Устинович будто бы по постороннему поводу отозвал меня на минутку в сторону и тихо указал мне на ошибку, а затем уже громким голосом сказал что-то постороннее, что студенты восприняли как отзвук содержания нашей беседы. Я исправил свою оплошность, и такая деликатная поправка Константина Устиновича позволила и мне не потерять уважение студента, и студенту быть уверенным в справедливости оценки.

Огромный преподавательский опыт позволял Константину Устиновичу предугадать, какие типичные ошибочные выводы могут возникнуть у студентов при изучении некоторых тем. Он мог подсказать, какие существуют способы изложения той или иной темы и в чем их достоинства. Благодаря ему я понял, чего следует и мне добиваться в моей работе. У него я учился манере поведения со студентами, культуре преподавания. Математике меня учили все-таки в университете, а затем я учился сам, видя в этом и обязанность преподавателя, и способ достижения своей

[2] В 1970-х гг. экзамен в Политехе полагалось сдавать только у доски. Ставили много досок у стен, студенты писали на них формулы, доказательства и т.п., а преподаватель свободно ходил между ними и, как гроссмейстер ведет несколько партий в шахматы, вел одновременно несколько бесед, — другие формы сдачи экзамена не разрешались в принципе.

жизненной цели — познания Природы (точнее, познания способов ее познания). Впрочем, не все я знал безупречно, и Константин Устинович иногда деликатно наставлял меня.

Положение Константина Устиновича по нынешним административным меркам было не слишком высоким — доцент. Он и диссертацию-то собрался защищать уже в зрелом возрасте. Мне он в конце жизни говорил, что кандидатскую прилично защищать юношам, и он, чтобы не было стыдно возраста, намеревался защищать диссертацию очень далеко от института — в другой республике. Но он еще жил в то время, когда администраторский дух не захлестнул страну, когда человека ценили за его действительные достоинства, когда служебное положение не было главным аргументом в научном или педагогическом споре. Кроме того, он был сверхъестественно требователен к себе. Возможно, именно поэтому он не стал защищать уже подготовленную работу.

Обложка одного из пособий К.У. Шахно

Меня не удивляло, что Константина Устиновича знают (или хотя бы слышали о нем) практически все преподаватели математики Ленинграда — я ведь знал о существовании когда-то очень популярного его пособия для поступающих в вузы (хотя сам его не видел). Меня удивляло, что Константин Устинович знает всех вузовских преподавателей математики старшего поколения. Это объяснялось тем, что во времена его молодости выпуск математиков из стен университета был небольшим. Но все равно это меня удивляло. Я по-хорошему завидовал ему в этом. Мне было печально, что в моем поколении этого нет.

Еще меня удивляла память Константина Устиновича на людей. Например, то, как хорошо он помнит своих студентов. Как-то на прогулке (он тогда уже был на пенсии), я сказал ему об этом. Я спросил, всех ли своих студентов он так хорошо помнит? Помнит ли он тех, кто учился у него до войны? Он ответил: нет, конечно, не всех. Но некоторых — да. Постараюсь воспроизвести его ответ возможно более точно.

«Например, я очень хорошо помню, в какой аудитории, на каком месте сидел и как выглядел студент... (*фамилию студента — Каталынов или Мандельштам — автор этих строк не запомнил, аудиторию и корпус тоже, просто не придал значения тогда*). Как, Вы не знаете, что это за студент? А, ну конечно, Вас же тогда не было... Я никак не могу это осознать, мне все кажется, что это было недавно... Было трое студентов, которых обвинили в убийстве Кирова. Один из них (*или два — автор этих строк не помнит*) — был моим студентом, и я его очень хорошо помню, будто вчера его видел сидящим на лекции в первом ряду справа. Хотя, надо сказать, он ничем особенным не выделялся. Студент как студент. И когда было объявлено про убийство, я был поражен. Вообще, Вы знаете, наш институт имеет мало орденов. Меньше, например, чем университет. Некоторые думают, что это связано с убийством Кирова».

Наш разговор перешел на личность С.М. Кирова. Константин Устинович мне сказал: «Знаете, ведь мне приходилось видеть Кирова почти столь же близко, как и вот Вас сейчас». Я удивлен, прошу разъяснений. Константин Устинович смеется:

«Нет, лично с Кировым я не встречался. Кто я тогда был? Молодой человек. Просто Киров ни от кого не прятался. Тогда вообще все было проще. Киров ездил в открытой машине, без верха, из дома на работу в Смольный, по мосту через Неву, практически без охраны. И вот я как-то еду на площадке трамвая. Вы знаете, какие были тогда трамваи? С отодвигающейся вбок дверью в тамбур. Эти двери никто не задвигал летом. И можно было ехать на подножке, уцепившись за поручни, зайцем, если вагон полон. (*Я подтвердил, что отлично помню те трамваи, потому что сам на них ездил в детстве.*) Ну вот, народу полно, я еду на краю тамбура. А рядом по мосту едет Киров в открытой машине. В машине только он и его шофер. Никакой охраны, как сейчас у наших правителей. От меня до Кирова метра полтора–два. И едем мы примерно с одной скоростью. Так что, если кто хотел бы из народа Кирова застрелить, это было бы очень легко сделать, он ведь там постоянно ездил, а на повороте при съезде с моста его машина всегда снижала скорость. Его в тот момент не то что из револьвера можно было бы достать... Знаете... (*Константин Устинович подбирает слова, улыбается*), его просто плевком можно было бы достать, если захочется... но никому из народа этого не надо было, — убийства Кирова...»[3]

Такие беседы у него дома или на прогулке происходили у нас безо всякого плана и направления. Я часто говорил, что надо бы ему записывать свои воспоминания для следующих поколений. Но он с такой сверхъестественной обстоятельностью относился к процессу написания книг, что просто записать пришедшее в память случайное воспоминание, без связи с остальными, без обдуманного плана и т.п. ему казалось немыслимым кощунством. Для него написание книги было целым ритуалом, нарушать который было нельзя. Думаю, поэтому он и не записал ничего. А моя память сохранила мало из наших бесед — ведь он говорил о людях мне незнакомых и фактах совсем неизвестных.

Я спрашивал его о блокаде Ленинграда: что ему больше всего запомнилось? Он нехотя (все блокадники не любят вспоминать этот ужас) сказал, что не было в блокаду того, что обычно показывают в хронике: как группа санитаров бежит с носилками от машины скорой помощи к упавшему человеку где-то на набережной Фонтанки. Наоборот, был эгоизм, потому что не было сил помогать другим, когда сам стоишь на краю могилы. В магазине, при получении пайки хлеба, женщины озирались, опасаясь, что рядом окажется какой-нибудь ремесленник или школьник. Такие подростки, потеряв от голода рассудок, выхватывали у женщин из рук прямо в магазине получаемый ими на всю семью хлеб и тут же заталкивали его себе в рот, чтобы не отняли. А без этого хлеба — верная гибель всей семьи от голода. Эти ребята дежурили в магазинах, поджидая удобный случай. Зимой люди падали от голода и замерзали. И никто не помогал.

А Константин Устинович был вынужден страшной зимой 1941–1942 гг. ходить два раза в неделю с левого берега Невы вдоль проспекта Карла Маркса в институт — отмечаться. Занятий не было, но отмечаться на работе полагалось, иначе не дали бы карточек на хлеб. Так вот, как-то раз он идет и видит человека, страшно худого, кото-

[3] Напомню читателю, что сегодня Николаева, секретаря комсомольской организации Политеха, считают одиночным убийцей, но тогда обвинили троих — Николаева, Каталынова и Мандельштама, если я правильно запомнил слова Константина Устиновича.

рый стоит на месте и странно улыбается улыбкой идиота. Он еще тогда подумал, что этот человек — не жилец. И точно, на обратном пути вечером он увидел этого человека лежащим на том же самом месте, в сугробе. Помочь он ему ничем не мог...

Здание Ленинградского политехнического института

Повторюсь: при всей своей строгости, принципиальности и аккуратности (которая некоторым казалась педантичностью) как преподаватель он был человечен и неформален. Он мог сделать что-то официально запрещенное (и этим в какой-то степени рискнуть своим благополучием), чтобы помочь студенту, попавшему в тяжелые жизненные обстоятельства (но только при условии, что студент того заслуживает, — шалопаи и бездельники никакой пощады от него не видели). И вообще многими студентами в 1970-х гг. он воспринимался как дедушка — добрый, но строгий. К.У. Шахно с неодобрением относился к репетиторству, — торговлю знаниями, как мне кажется, он относил к разряду торговли святынями. А уж тех, кто набирал себе сразу нескольких учеников и вел с ними частные занятия одновременно, а не индивидуально, он вообще считал рвачами, неприличными людьми. Сам он в жизни всегда трудился и уважал только честный труд окружающих, купленные знания он не уважал.

После выхода на пенсию Константин Устинович жил в своей квартирке в нескольких сотнях метров от кафедры (на улице Хлопина). Жена умерла. Сын женился, поселился отдельно от отца. Константин Устинович значительную часть времени проводил один. Сын его навещал, насколько могу судить, почти ежедневно. Только летом, когда сын уходил в традиционный турпоход, Константин Устинович надолго оставался один.

Константин Устинович страдал не столько от одиночества, сколько от вынужденного отрыва от дела, — от преподавания, от студентов. На кафедру он не заходил никогда, — считал, что там уже другие люди, новое поколение, и ему там встречаться не с кем. А душу бередить воспоминаниями, связанными со стенами института, ему было очень тяжело. Но меня он постоянно спрашивал о новостях. Хотя что я ему мог сказать? — Я никогда не был в курсе происшествий, потому что жил только преподаванием, своими студентами, курсом математики.

На улице Константин Устинович избегал встреч со стариками — соседями по дому. Он обходил их стороной, завидев издали. Он боялся расспросов, воспоминаний о былом. Особенно — о жене, которую, как и его, знали многие в их доме. Он говорил мне, что не может вынести этих разговоров — так они ему делают больно. Поэтому многие считали его нелюдимым и брюзгой. Но это было неправдой. Константин Устинович действительно весь остаток жизни горевал об умершей жене. Он не трогал некоторые вещи в квартире, которые были связаны с памятью о ней. Например, в кухне у него безо всяких изменений висел настенный отрывной календарик в том самом виде, в каком его оставила жена — у них в семье было принято, что именно она отрывает в нем листки. Он сказал мне, показав на календарик, что время для него остановилось. Был даже такой случай: Константин Устинович обнаружил, что на кухне идет газ из плиты — он забыл про кастрюлю, кастрюля залила огонь. А через несколько дней, когда я его навестил, он в задумчивости сказал: «Как жаль, что почувствовал запах газа, — лег бы спать и не проснулся бы, так легко!»

Меня удивлял его железный распорядок дня. Он всегда обедал в одно и то же время. Сам готовил себе обед. Просто виртуозно. Вкусноты необычайной, хотя все самое простое — каша и т.п. Всегда готовил свежее, никогда не варил впрок. Никогда не брал готовых продуктов или готовых обедов. Это меня изумляло. А его изумляло мое удивление — ему все это казалось естественным.

Близость кафедры, насколько я могу судить, постоянно, как сильнейший магнит, тянула его назад, в институт, в прожитую жизнь, в которую нет возврата, в аудиторию, в которую ему не дали вернуться.

Выше всего на свете, Константин Устинович, кажется, ставил свои преподавательские обязанности, свой учительский долг. Когда он выходил к доске — это был человек вне житейских переживаний, это был человек, причастный к высшему знанию, к высшим ценностям. И такого же отрешения от земных забот он ждал от студентов. Даже тяжелейшее горе, когда пришло известие о смерти его любимой дочери в Москве, не могло сломить эту его жизненную установку: на лекции Константин Устинович иногда уходил из поля зрения студентов к окну сбоку от амфитеатра, делал вид, что смотрит в окно, а сам тихо плакал. Затем, успокоившись, приведя лицо в порядок, — возвращался к доске читать лекцию. Не знаю, замечали ли что-то студенты. На рабочем столе дома он держал фотокарточку, точнее — фотомонтаж, на котором рядом изображены три похожих малыша лет двух–трех: он сам, его дочь и его сын.

Константина Устиновича сломила смерть жены. Я не был с ней знаком, видел только один раз: это была очень красивая женщина, державшаяся с большим достоинством, но просто и естественно. Участковый врач проявил халатность и не распознал у нее заболевание почек, назначив лечение от простуды. Когда ошибка была понята, исправить ее уже было невозможно. Весь ужас угасания любимой женщины, которая сначала жалуется только на слабость, затем все тяжелее встает по утрам, затем теряет интерес к жизни и не узнает мужа, Константин Устинович стоически вынес и никто не слышал от него жалоб. Растяпу-врача он не стал преследовать, — понимал, сколь тяжела доля участкового врача и знал, что именно по этой причине врач допустил оплошность. Но после этого удара судьбы он уже не мог быть прежним. Думаю, с этим связан его тихий уход на пенсию с поста главы секции преподавателей физико-металлургического факультета. Как профессиональный преподаватель он еще был полон сил, мог бы читать лекции, но мешал чьим-то карьерным устремлениям и были надломлены его духовные силы. Он не стал унижаться борьбой за свое право продолжать готовить инженеров.

Он вырастил для страны минимум несколько тысяч специалистов высшего класса. Давайте вместе подсчитаем их число. В 1970-х гг. обычным был поток в 6–10 групп по 25–30 студентов в каждой. Группы были большими: при зачислении старались набрать лишних студентов, предвидя отсев в будущем. То есть в потоках было 150–300 студентов. Лекционные аудитории были полны до самого верха. К слову сказать, акустика аудиторий в главном здании Политеха отвратительна.

К.У. Шахно и старейший преподаватель кафедры С.И. Амосов

Но Константин Устинович умел громким голосом, четкой дикцией исправлять огрехи архитекторов. Итак, лектор-математик вел своих студентов два-три года. Затем к нему приходил новый поток первокурсников. Таким образом, лектор в среднем ежегодно обучал около 100 студентов. Умножим это на 51 год преподавательской деятельности Константина Устиновича, сколько получится? Около 5000. А если учесть многомиллионные тиражи его учебников в послевоенные годы... Да еще учесть, что их массово издавали за рубежом... Тогда получится, что число учеников у Константина Устиновича — не тысячи, а сотни тысяч, если не миллионы.

По этому поводу профессор В.М. Калинин несколько раз говорил (с интервалом в несколько лет): «Все мы, — я имею в виду послевоенное поколение студентов, — в какой-то мере являемся учениками Шахно. Я, например, перед поступлением в университет проштудировал его пособие для поступающих в вузы от корки до корки».

Сам Константин Устинович был смущен этим высказыванием. Он как-то при встрече сказал мне с иногда проскальзывавшей у него резкостью: «Вот меня Калинин на днях навестил. Назвал меня своим учителем. Вы не знаете, чего он ко мне в ученики напрашивается? Ну какой я ему учитель? Он — профессор, величина, работал в ЛОМИ[4]. А я — всего лишь доцент, пособие для поступающих в вузы написал». Константин Устинович явно не видел в своих трудах ничего выдающегося. Это было для него характерным. «Ведь Вы знаете, почему оно вышло таким огромным тиражом?» — говорил он. — «После войны мужчины вернулись с фронта, началась мирная жизнь, всем сразу учиться захотелось. После войны, чтобы стать начальником, надо было вуз кончить. До войны это не было так ярко выражено. Вот все и бросились готовиться в вузы. Потому и спрос был большой на пособие. Таких пособий ведь раньше просто не было».

Я как-то спросил Константина Устиновича, по каким учебникам он сам учился математике в университете. Он сказал мне, что в его время с учебниками было крайне плохо. Очень был нужен задачник, который кратко, по числу авторов, называли «семь мудрецов» (шуточный намек на семь мудрецов античного периода)[5].

---

[4] Ленинградское отделение Математического института им. В.А. Стеклова. — *Прим. ред.*

[5] Вот этот задачник: Сборник задач по высшей математике преподавателей Института Инженеров Путей Сообщения А.А. Адамова, А.П. Вилижанина, Н.М. Гюнтера, А.Н. Захарова, В.М. Мелиоранского, В.Ф. Точинского и Я.В. Успенского. СПб., 1912.

Такой задачник можно было купить в «Старой книге». Когда Константин Устинович пришел в этот магазин и спросил о задачнике, назвав его, как полагается, продавец переспросил: «Семь мудрецов? Есть один экземпляр» — и вытащил книгу откуда-то из-под прилавка. Цену за нее заломил 30 рублей (если память не изменяет автору этих строк). Это была месячная стипендия Константина Устиновича (или даже больше). А других средств к существованию у него тогда не было. Не было и родственников, которые могли бы помочь. Но он заплатил и пошел с этой книжкой, которая была для него драгоценной и в прямом и в переносном смысле.

А в университет он пришел... из ветеринарного техникума. После детдома, где Константин Устинович воспитывался вместе с сестрой, он учился в ветеринарном техникуме, в который попал по воле судьбы. Был даже на практике в колхозе. И с тех пор верил, что не было никакого вредительства на селе, а было преднамеренное убийство колхозных коров на мясо — надо же крестьянам что-то кушать. «Ну зачем корова станет жевать гвозди? Подумайте сами, — говорил он мне, — колхозный ветеринар составляет акт о гибели коровы и в доказательство прикладывает ее желудок, из которого во все стороны гвозди торчат как из ежа иголки...»

В университет его направили по путевке, как отличника. И на экзамены он поехал в первом в своей жизни костюме, который ему купило в складчину общежитие. Экзамен по литературе был устным, и два старых преподавателя дореволюционного вида спрашивали его о «Войне и мире» Льва Толстого. Он отвечал более или менее сносно, но когда его спросили о смысле названия романа, то о слове «мир» он так и выложил: что, мол, то война, то мир... Преподаватели переглянулись, а потом один из них спросил, как до революции писалось это слово — «мир»? Константин Устинович и меня поймал на незнании этого.

Когда Константин Устинович совсем ослабел, его сыну, Владимиру Константиновичу, пришлось переехать к отцу, чтобы ухаживать за ним постоянно. С этого момента я практически перестал бывать у Константина Устиновича. И потому, что визит в теперь уже наполненную квартиру был бы обременителен для хозяев, и потому, что моя помощь не была нужна, и из-за появившихся у меня своих семейных проблем. Поэтому о последних годах жизни Константина Устиновича я знаю только со слов Владимира Константиновича.

В последние дни жизни Константин Устинович очень ослаб, впал в полубеспамятство, совсем не вставал с постели. И вот в этом состоянии, лежа на спине, он стал... вслух читать лекции по математике. Не знаю, возможно, ему казалось, что он — на своем месте, у доски в большой аудитории. А может, и не казалось, но эти «лекции» были тем единственным и самым главным делом в жизни, которое у него ассоциировалось с самой жизнью. Он громко, во весь голос, почти не приходя в себя, читал свои последние лекции… Лекции эти, разумеется, были лишь набором математических фраз, плодом возбуждения мозга полностью обессиленного, умирающего человека. Но вдумайтесь, читатель, в сам факт: покидая этот мир, верующие молятся Всевышнему, а Константин Устинович Шахно — преподаватель с 50-летним стажем, автор пособий с многомиллионными тиражами, воспитатель тысяч инженеров, — громко читает напоследок лекцию по математике!

И если меня когда-нибудь спросят: «Не следует ли поправить ошибку истории — дать институту еще несколько орденов, чтобы в этом уравнять его с другими вузами?», я твердо отвечу: «Нет, не следует». И вовсе не потому, что секретарь комсомольской организации Политеха застрелил Кирова. А потому, что в нем выгоняют на пенсию, лишают возможности преподавать таких преподавателей, которые в момент ухода из жизни читают лекцию по математике.

Прах Константина Устиновича, как он и просил, подхоронили в могилу на Северном кладбище, к его жене, которую он любил и по которой горевал до самых последних своих дней.

Добавление

Я расскажу еще один эпизод биографии К.У. Шахно, требующий от читателя весьма аккуратной оценки, выходящей далеко за рамки повседневных понятий поколений конца XX века.

В блокаду, страшной зимой 1941 г., когда голодная смерть косила в Ленинграде людей десятками тысяч, К.У. Шахно навестил Е.В. Вороновскую. Он застал ее настолько обессиленной, что она не могла сходить «отоварить» хлебную карточку (раз в неделю по карточкам выдавали продукты), и по этой причине ожидала неминуемой гибели от голода. К.У. Шахно взялся сходить и получить для нее хлеб. Она отдала ему все свои карточки, и он ушел за хлебом.

Теперь наступает самый тонкий момент, который трудно понять нашим современникам. Е.В. Вороновская терзалась страхом, что ее добровольный помощник не вернется. Не потому, что она была о К.У. Шахно плохого мнения, — вовсе нет, а потому, что вернуться с хлебом было бы выше человеческих сил. На это были способны очень немногие люди, — люди поистине стальной воли.

Получить хлеб на неделю и исчезнуть, — так поступили бы многие на месте К.У. Шахно в то страшное время. В условиях смертельного голода все обычные нормы морали в сознании расплываются, становятся чем-то несущественным в сравнении с переносимыми страданиями. Смертельно голодный человек всегда найдет моральное оправдание своему поступку, который в нормальных условиях был бы немыслимым, но в условиях голода мог спасти ему жизнь. «Она все равно уже не жилец, у нее ноги опухли» — так подумали бы многие на месте К.У. Шахно.

Подростки, посланные в пункт выдачи продовольствия за продуктами, не имели душевных сил донести эти продукты нетронутыми до своих семей. Это ужасно: нести крупу, каждое зернышко которой в миллионы раз вкуснее конфеты. Так просто утешить себя тем, что от одного зернышка меньше не станет. И так тяжело, жуя это зернышко, чувствовать себя преступником. И какой ужас испытывал несчастный подросток, когда он обнаруживал, что в голодном полузабытьи сгрыз весь запас крупы для семьи!

В блокированном городе были и мародерство, и убийства на почве голода, и людоедство. Трупы людей, погибших от голода, ночами выносили во двор. В районе Витебского вокзала, недалеко от Технологического института, рядом с которым жила Е.В. Вороновская, покойников ночами выносили на лед Обводного канала. Там можно было видеть трупы, разрубленные на мясо. Мне это известно от нескольких людей. Люди натыкались на отрезанные головы и разрубленные трупы прямо во дворах своих домов. О воровстве продуктов в органах снабжения и в медицинских учреждениях даже говорить не приходится.

Уйти с хлебом, продлить свою жизнь, оставить жертву и единственного свидетеля преступления на верную смерть в холодной комнате, — было так просто. И никто бы никогда не узнал об этом.

Но К.У. Шахно вернулся и принес хлеб. С тех пор Е.В. Вороновская до конца своих дней относилась к нему с безграничным уважением.

Сам он этот эпизод вспоминать не хотел.

Эту историю я не мог никому рассказывать при жизни ее участников по причине, догадку о которой я оставляю читателю в качестве домашнего упражнения.

В качестве второго упражнения предлагаю читателю догадаться об отношении после войны преподавателей-блокадников к некоторым академикам, которые аж 22 июня 1941 г., не захватив документов и денег, бросились в поезд, идущий в Сибирь.

Приложение. Книги К.У. Шахно

1. Сборник конкурсных задач по математике с решениями. Л., 1951 (3-е изд. Л., 1954).

2. Сборник задач по математике. Пособие для учителей 8–10 классов. Л.-М., 1952 (3-е изд. Л., 1956).

3. Справочник по элементарной математике. Л., 1955.

4. Справочник по математике. Пособие для учащихся 8–10 классов. Л., 1957 (2-е изд. Л., 1961).

5. Пособие по математике для поступающих в высшие учебные заведения. Сборник конкурсных задач по математике с решениями. 4-е изд. Минск, 1960 (8-е изд. Минск, 1964).

6. Как готовиться к приемным экзаменам в вуз. Математика. Л., 1961 (2-е изд. Л., 1962).

7. Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления. Л., 1961 (2-е изд. Минск, 1975).

8. Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности. Минск, 1963 (5-е изд. Минск, 1969).

9. Как готовиться к приемным экзаменам в вуз по математике. 3-е изд. Минск, 1965 (10-е изд. Минск, 1973).

10. Из сборника задач по математике. Пособие для учителей 8–10 классов. Задачи. (Алгебра и тригонометрия.) [М.], 1966. (Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. Заоч. матем. школа.)

11. Справочник по математике. 3-е изд. Минск, 1967 (4-е изд. Минск, 1968).

12. Элементарная математика для окончивших среднюю школу. Л., 1976.

◀ Вернуться к содержанию

Вокруг математики

Формула Эйлера и теорема Понселе

ШАБАТ Георгий Борисович
профессор Института лингвистики
Российского государственного
гуманитарного университета
george.shabat@gmail.com

СГИБНЕВ Алексей Иванович
учитель математики школы-интерната
«Интеллектуал» г. Москвы
sgibnev@mccme.ru

Наша цель сегодня — доказательство трех геометрических теорем (хотя в заголовке статьи их всего две). Две из них — обычные теоремы школьной математики, а третья — не совсем обычная. Геометрия — замечательная наука, в которой придумывать задачи не надо. Сами ее объекты таят в себе очень глубокую и очень трудную математику, о «кусочках» которой мы сегодня и поговорим. Мы будем работать с треугольниками и вписанными в них и описанными около них окружностями.

Формула Эйлера

Напомним, что центр описанной окружности треугольника лежит на пересечении его серединных перпендикуляров, а центр вписанной окружности — на пересечении его биссектрис. Для радиусов этих окружностей существуют стандартные обозначения: r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности. Расстояние между центрами окружностей традиционно обозначается буквой d.

Теорема Эйлера гласит: $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Наша первая цель — доказать ее (см. чертеж в «Живой геометрии»[1]). При доказательстве нам потребуется чертеж. Можно нарисовать один чертеж сразу со всеми деталями, но его будет трудно понять. Поэтому мы будем рисовать много чертежей.

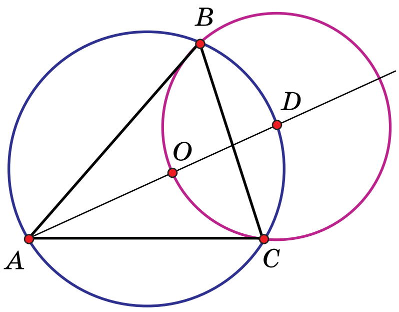


Рис. 1.

Назовем наш треугольник ABC и построим биссектрису угла A. Пусть она пересекает описанную окружность в точке D. Построим новую окружность с центром в точке D и проходящую через вершину B (рис. 1). Оказывается, при этом она пройдет и через вершину C. Это легко понять: дуги BD и DC равны, поэтому и расстояния от точки D до двух вершин равны. Удивительнее другое: точка пересечения окружности с биссектрисой совпадает с центром O вписанной окружности! Это будет наша дополнительная теорема.

Теорема 0. *Пусть в треугольнике ABC точка O — центр вписанной окружности, а точка D лежит на пересечении биссектрисы угла A с описанной окружностью. Тогда окружность с центром D, проходящая через вершину B, проходит и через точку O.*

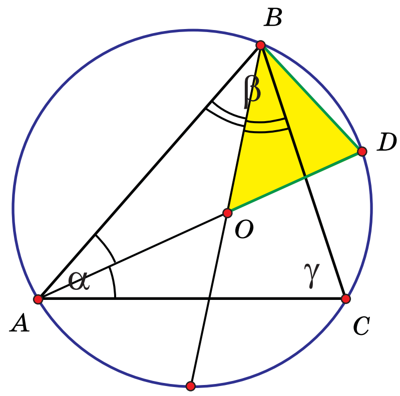


Рис. 2.

Чтобы доказать теорему, покажем, что $BD = OD$, т.е. что треугольник BDO является равнобедренным (рис. 2). Для этого вычислим его углы. Введем традиционные обозначения для углов треугольника ABC: α, β и γ. Заметим, что угол BDO опирается на дугу AB, как и угол ACB. Поэтому $\angle BDO = \angle ACB = \gamma$.

Осталось вычислить два других угла треугольника BDO. Легче найти угол OBD, который состоит из двух углов. Один из них опирается на половину дуги, стягиваемой хордой AC, и поэтому равен $\frac{\beta}{2}$. Другой угол опирается на дугу DC, т.е. на половину дуги, стягиваемой хордой BC, и поэтому равен $\frac{\alpha}{2}$. Итак, $\angle OBD = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. Поскольку на все три угла треугольника BDO приходится 180°, то $\angle BOD = 180^\circ - \gamma - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \angle OBD$. Поэтому треугольник BDO действительно равнобедренный, и теорема доказана.

Теперь мы переходим к доказательству формулы Эйлера (см. [4]). Посчитаем произведение $AO \cdot OD$ двумя способами. В первом способе используется один из «законов сохранения» геометрии: если вращать хорду вокруг какой-то точки внутри окружности, то произведение отрезков хорды остается постоянным[2]. Значит,

---

[1] Читателям рекомендуется проводить построения и проверять наши утверждения в программе «Живая геометрия» (ее можно скачать здесь: http://www.mathedu.ru/polinom/gsp.zip). Главная сила этой программы в том, что мы можем, нарисовав треугольник один раз, его варьировать, измерять отрезки и углы и т.д. В тексте приведены две интернет-ссылки на чертежи «Живой геометрии», которые иллюстрируют и проверяют формулу Эйлера и теорему Понселе.

[2] См., например: *Атанасян Л.С. и др.* «Геометрия, 7–9», п. 71, последняя теорема пункта.

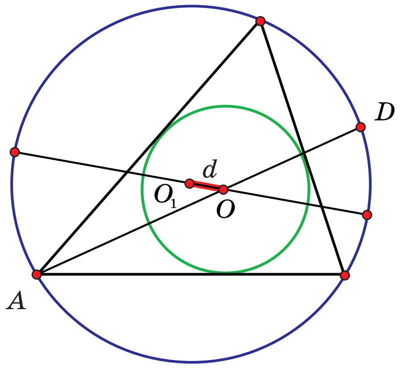


Рис. 3.

мы можем провести через точку O хорду так, как нам удобно — произведение будет таким же. Проведем хорду через центр описанной окружности O_1 — получится диаметр описанной окружности (рис. 3). Точка O делит этот диаметр на два отрезка длинами $R + d$ и $R - d$ (напомним, что $d = OO_1$ — расстояние между центрами окружностей). Поэтому произведение этих отрезков равно $R^2 - d^2$ (эта величина уже напоминает формулу Эйлера).

Теперь посчитаем произведение $AO \cdot OD$ непосредственно. Для этого вычислим длины отрезков AO и OD. Посмотрим на серый треугольник (рис. 4). Из определения синуса сразу получаем, что $AO = \dfrac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

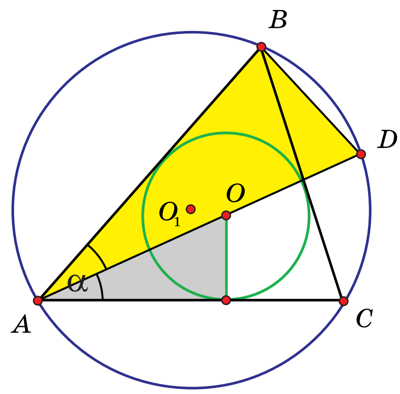


Рис. 4.

Длина другого отрезка вычисляется в два шага.

Из теоремы 0 мы знаем, что $OD = BD$, а по теореме синусов для треугольника ABD, вписанного в синюю окружность: $OD = BD = 2R\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

Перемножив полученные выражения для AO и OD, получим, что $AO \cdot OD = 2Rr$. Значит, $R^2 - d^2 = 2Rr$, и формула Эйлера доказана.

Едва ли кто-то из читателей может сказать, что получил *полное* удовлетворение от проведенного доказательства. Несмотря на его краткость и логическую безупречность, в нем есть что-то трудное. Вряд ли можно научить *придумывать* такие доказательства — их можно только *воспроизводить*, причем в памяти они не держатся[3]. Сейчас мы покажем, что эта формула равносильна теореме, которая, наоборот, держится в памяти безо всяких усилий и при этом связана со «взрослой» математикой.

Теорема Понселе

Как представить себе все треугольники на свете? Все знают третий признак равенства треугольников, который означает, что треугольник полностью задается тремя сторонами. Представьте себе угол комнаты. Вдоль одного плинтуса будем откладывать сторону a, вдоль другого — сторону b, а вверх по углу — сторону c. Тогда точка внутри комнаты имеет три координаты a, b и c и тем самым соответствует некоторому треугольнику. Например, точка (3, 4, 5) задает знаменитый египетский треугольник (прямоугольный).

Но всякая ли точка нам годится? Нет, например, точка (1, 2, 4) не соответствует никакому треугольнику. Должно быть выполнено неравенство $a + b > c$ и еще два аналогичных неравенства $a + c > b$ и $b + c > a$. Эти ограничения задают трехгранный угол с вершиной в начале координат и границами $a + b = c$, $b + c = a$, $a + c = b$, т.е.

[3] Авторы признаю́тся, что и они не держат его в памяти, а когда надо, восстанавливают по записям.

ребра этого угла — биссектрисы координатных углов (ab), (bc) и (ac) (см. рис. 5).

Итак, любая точка внутри этого трехгранного угла соответствует треугольнику. И наоборот, каждый треугольник соответствует какой-то точке внутри угла. Таким образом, мы задали *трехмерное* пространство всех треугольников.

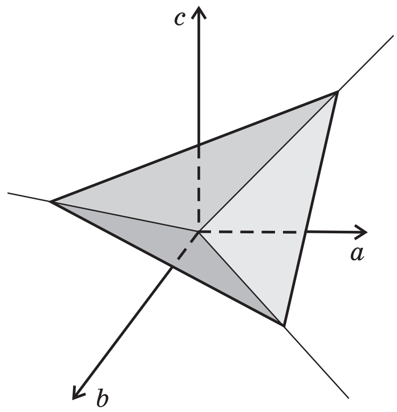


Рис. 5.

Теперь подумаем, чем задается пара окружностей. Тоже тремя числами: радиусами R и r и расстоянием между центрами d. Точка октанта[4] трехмерного пространства с координатами (R, r, d) соответствует паре окружностей, и наоборот, каждая пара окружностей соответствует какой-то точке этого октанта. Получаем трехпараметрическое пространство пар окружностей.

Поскольку с каждым треугольником связаны две окружности — вписанная и описанная, то каждой точке «пространства треугольников» соответствует точка «пространства пар окружностей». Получаем *отображение* множества треугольников на множество пар окружностей.

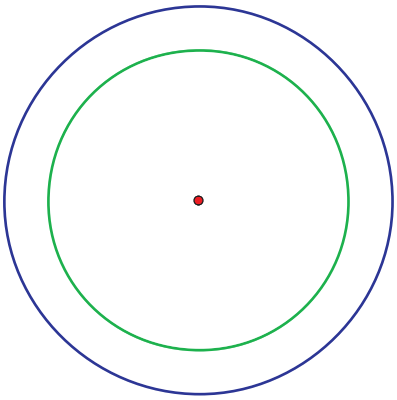


Рис. 6.

Любая ли точка пространства пар окружностей может получиться при этом отображении? Нет, не любая: например, окружности на рисунке 6, очевидно, ни для какого треугольника не являются вписанной и описанной. Формула Эйлера показывает, как должны быть связаны величины R, r и d, чтобы окружности были вписанной и описанной. Во-первых, должно выполняться неравенство $R \le 2r$ (которое и нарушается в примере на рис. 6). Во-вторых, по заданным R и r можно однозначно определить d. Например, если $R = 2$, $r = 1$, то $d = \sqrt{2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1} = 0$. (Это означает, что окружности радиусов 1 и 2 должны быть концентрическими, чтобы нашелся треугольник, вписанный в одну и описанный вокруг другой; подумайте, что это за треугольник.)

Поэтому трехгранный угол в пространстве (a, b, c) отображается на некую поверхность в пространстве (R, r, d). Примерное представление об этой поверхности дает рис. 7. Подчеркнем, что *трехмерная* область отображается на *двумерную* поверхность. Это означает, что трехмерную область можно разбить на кривые, каждая из которых отображается *в одну точку* поверхности[5] (какие именно это кривые — отдельный вопрос, но сейчас это неважно). А потому каждой паре окруж-

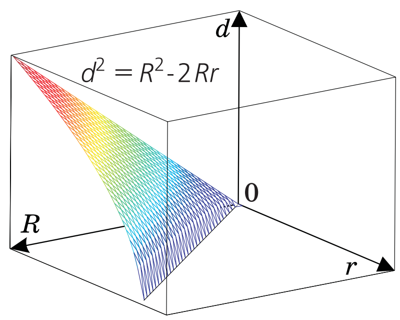


Рис. 7.

[4] Поскольку $R > 0$, $r > 0$, $d > 0$.

[5] Это рассуждение непривычно для школьника, но современная математика может придать ему строгий смысл.

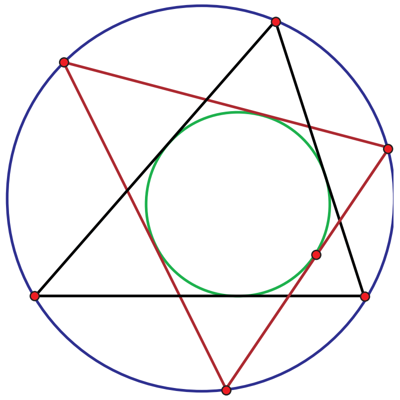


Рис. 8.

ностей, удовлетворяющих формуле Эйлера, должен соответствовать не один, а *много* треугольников, целое непрерывное семейство.

Давайте посмотрим на нашу пару окружностей и попробуем найти другие треугольники, для которых они являются вписанной и описанной. Возьмем произвольную точку на синей окружности, проведем из нее две касательные к зеленой окружности и соединим отрезком точки их пересечения с синей окружностью. Окажется, что этот отрезок тоже касается зеленой окружности! Тем самым получается новый треугольник, вписанный в синюю окружность и описанный вокруг зеленой (рис. 8). Можно двигать исходную точку по синей окружности — свойство сохранится. Итак, черный треугольник определил синюю и зеленую окружности, которые в свою очередь определяют целое *семейство* треугольников.

Теорема Понселе. *Вписанная и описанная окружность к данному треугольнику являются вписанной и описанной к бесконечному семейству треугольников* (см. чертеж в «Живой геометрии»).

Итак, мы вывели из формулы Эйлера теорему Понселе. Правда, при этом пришлось привлекать «взрослую» математику. Наоборот, из теоремы Понселе формула Эйлера выводится элементарно. Мы можем поместить вершину коричневого треугольника куда хотим, в том числе на прямую OO_1, соединяющую центры окружностей. В этом случае треугольник станет равнобедренным (рис. 9). То есть нам достаточно проверить формулу Эйлера только для равнобедренного треугольника, а это нетрудно (см. ниже задачу 1).

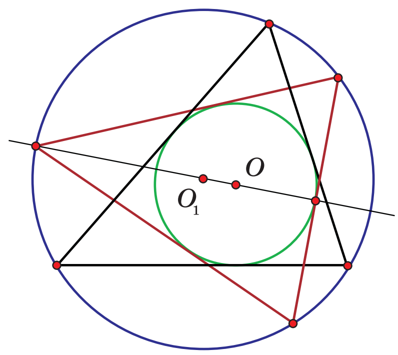


Рис. 9.

Историческая справка

Интересно, что обе рассмотренные теоремы, принадлежащие людям с иностранными фамилиями, имеют отношение к России.

Леонард Эйлер — выдающийся ученый швейцарского происхождения, который более 30 лет работал в Санкт-Петербурге. Он занимался не только математикой, но и физикой, географией и другими науками (например, составил первую карту России). Он замечателен и тем, что много работал в области элементарной математики, например, геометрии треугольника. Формула, о которой рассказано в этой статье, опубликована в 1767 году. Это один из огромного количества результатов Эйлера [1].

Понселе доказал свою теорему в городе Саратове в 1814 году. В Саратов он попал в качестве пленного офицера наполеоновской армии. В плену он имел возможность заниматься математикой, а вот вернувшись во Францию, погрузился в общественную жизнь, и времени на математику ему не хватало [3].

С точки зрения современной математики связь между теоремами почти очевидна, однако между их доказательствами прошло полвека. При этом Понселе никак на теорему Эйлера не ссылался.

Задачи

1. Докажите формулу Эйлера для равнобедренного треугольника.

2. Придумайте обобщения формулы Эйлера и теоремы Понселе на следующие случаи: 1) описанная и вневписанная окружности; 2) четырехугольник [5].

Указания: 1) с помощью введения координат свести задачу к алгебраической; 2) построить подходящее семейство вписанно-описанных четырехугольников; равнобочные трапеции помогают угадать правильную формулу.

Решать задачи помогут эксперименты в «Живой геометрии». Желаем успеха в решении.

Литература

1. *Гиндикин С.Г.* Рассказы о физиках и математиках. М.: МЦНМО, 2001. С. 204–252.

Интересный очерк жизни и научной деятельности Эйлера.

2. *Заславский А.А., Челноков Г.Р.* Теорема Понселе в евклидовой и алгебраической геометрии // Математическое образование. 2001. № 4(19). С. 49–64.

3. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Часть I. М.-Л.: ГОНТИ, 1937. С. 109–110.

Краткая биография Понселе в изложении классика математики.

4. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. Часть 1. М.: Наука, 1991.

В задаче 5.11 приводится доказательство формулы Эйлера.

5. *Шарыгин Г.И.* Четырехугольники и теорема Понселе // Потенциал. 2009. № 1. С. 28–35.

Статья содержит элементарно-геометрический вывод теоремы Понселе из формулы Эйлера, а также обобщение обоих утверждений на случай четырехугольников.

◀ Вернуться к содержанию

МЯКИШЕВ Алексей Геннадьевич
учитель математики Московского Химического Лицея
alex_geom@mtu-net.ru

> Козлевич был так погружен в свои печальные размышления, что даже не заметил двух молодых людей, уже довольно долго любовавшихся его машиной.
>
> — Оригинальная конструкция, — сказал наконец один из них, — заря автомобилизма. Видите, Балаганов, что можно сделать из простой швейной машинки Зингера? Небольшое приспособление — и получилась прелестная колхозная сноповязалка.
>
> *Илья Ильф, Евгений Петров.* Золотой теленок

Что такое треугольный фрактал

Определение треугольного фрактала

Допустим, что мы располагаем неким способом, с помощью которого можем построить N $(N \geq 2)$ треугольников $T_1^1,\ldots,T_N^1$, подобных исходному треугольнику T_0 с коэффициентами подобия k_1, ..., k_n соответственно. Треугольники и сам способ построения должны удовлетворять трем условиям:

1. $T_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{N} T_i^1 \subset T_0$, $T_1 \neq T_0$.

2. Точки пересечения T_i^1 и T_j^1 $(i \neq j)$, если они имеются, принадлежат сторонам треугольников.

3. Если вместо T_0 взять треугольник T_0', подобный T_0, и применить к новому треугольнику данный способ построения, то получатся N треугольников, подобных T_0' с теми же самыми коэффициентами подобия k_1, ..., k_n.

Далее, к каждому из N треугольников, полученных на первом шаге, применим наш способ — это и будет вторым шагом в построении всей конструкции. В результате получим N^2 треугольников $T_1^2,\ldots,T_{N^2}^2$ и положим по определению $T_2 = \bigcup\limits_{i=1}^{N^2} T_i^2$. Продолжая действовать таким образом, мы построим счетную последовательность непустых компактных множеств, вложенных друг в друга: $T_0 \supset T_1 \supset T_2 \ldots$ Согласно известной теореме общей топологии (см. [4]), $F = \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} T_i$ также является непустым и компактным множеством.

Множество F назовем фракталом, порожденным начальным треугольником T_0 и данным способом построения.

Из определения сразу следует, что $0<k_i<1$ для всех натуральных i таких, что $1\le i\le N$. Далее, $k_1^2+\ldots+k_N^2<1$, так как $S_0>\sum_{i=1}^{N}S_i^1=S_0\sum_{i=1}^{N}k_i^2$, где S_0 — площадь T_0 и S_i^1 — площадь T_i^1.

Заметим также, что $\lim_{n\to\infty}S_n=0$ (S_n — площадь T_n), поскольку, как нетрудно видеть, $S_n=\left(k_1^2+\ldots+k_N^2\right)^n S_0$.

Определение размерности

По определению, *размерностью треугольного фрактала F назовем корень $d=d_0$ уравнения $k_1^d+\ldots+k_N^d=1$.*

Так как функция $F(d)=k_1^d+\ldots+k_N^d$ является непрерывной и убывающей (как сумма непрерывных и убывающих показательных функций) и $F(0)=N\ge 2$, $F(2)<1$, то уравнение $F(d)=1$ имеет единственное решение d_0, причем $d_0\in(0;2)$.

Методами вычислительной математики можно при желании в каждом конкретном случае определить d_0 с любой точностью. Иногда же удается найти и точное решение уравнения размерности, но оно, как правило, все равно будет иррациональным числом.

Отметим также, что

$$k_1+\ldots+k_n>1\Leftrightarrow d_0>1,\ k_1+\ldots+k_n=1\Leftrightarrow d_0=1,\ k_1+\ldots+k_n<1\Leftrightarrow d_0<1,$$

как это следует из равенств $k_1+\ldots+k_n=F(1)$, $F(d_0)=1$ и свойств функции $F(d)$.

С учетом этого мы имеем:

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\infty\Leftrightarrow d_0>1,\ \lim_{n\to\infty}P_n=P_0\Leftrightarrow d_0=1,\ \lim_{n\to\infty}P_n=0\Leftrightarrow d_0<1,$$

где P_n — периметр T_n: $P_n=(k_1+\ldots+k_n)^nP_0$.

Обратим внимание, что введенная нами размерность является частным случаем так называемой *размерности Хаусдорфа.* (Подробнее о ней, а также о фракталах вообще можно узнать из [1], [5], [7].)

Выражаясь неформально, на интуитивном уровне, можно сказать, что фрактальная размерность множества на плоскости выражает степень его отклонения от «правильной» кривой или фигуры (или близости к ней). Так, если размерность близка к единице, множество чем-то схоже с «обыкновенной» плоской кривой.

Ниже мы приведем несколько примеров треугольных фракталов, и сравним фрактальную размерность с единицей.

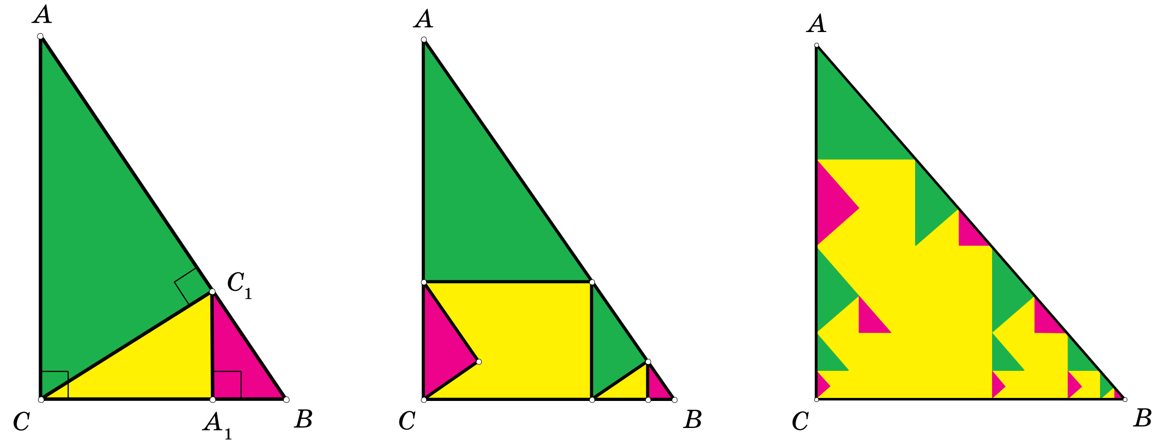
Договоримся каждый фрактал иллюстрировать тремя картинками, на которых изобразим соответственно первый, второй и четвертый шаг построения (T_1, T_2, T_4 в наших обозначениях). Треугольники с одинаковым коэффициентом подобия будем окрашивать в один и тот же цвет, а для различных коэффициентов подобия подберем и разные цвета. Область, *не* входящую во фрактал, всегда будем выделять *желтым.*

Прямоугольные фракталы

Первый прямоугольный фрактал

Пусть T_0 — некоторый прямоугольный треугольник, CC_1 — высота, опущенная из вершины прямого угла, C_1A_1 — перпендикуляр к BC[1].

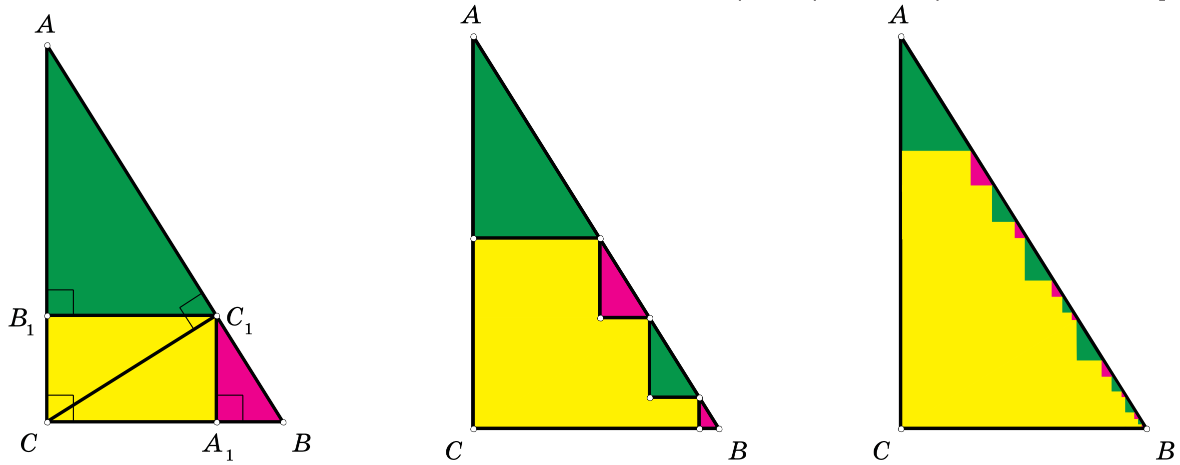
Имеем $N = 2$, $T_1^1 = \Delta C_1A_1B$, $T_2^1 = \Delta AC_1C$. Используя подобие, несложно проверить, что $k_1 = \dfrac{a^2}{c^2}$, $k_2 = \dfrac{b}{c}$. Уравнение размерности имеет вид: $\left(\dfrac{b}{c}\right)^d + \left(\dfrac{a^2}{c^2}\right)^d = 1$ или $\sin^d \angle B + \cos^{2d} \angle B = 1$. А так как $\sin \angle B + \cos^2 \angle B > \sin^2 \angle B + \cos^2 \angle B = 1$, то $d_0 > 1$.



Второй прямоугольный фрактал

Здесь C_1B_1 — перпендикуляр к AC, T_1^1 такой же, как и раньше, и $T_2^1 = \Delta AB_1C_1$ с $k_2 = \dfrac{b^2}{c^2}$. Уравнение размерности: $\left(\dfrac{b^2}{c^2}\right)^d + \left(\dfrac{a^2}{c^2}\right)^d = 1$, и по теореме Пифагора $d_0 = 1$.

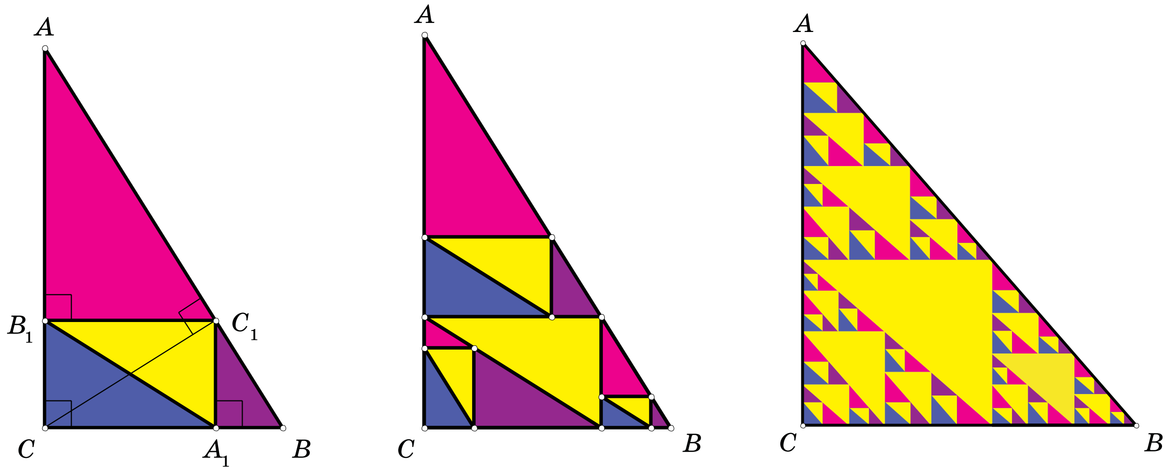
Отметим, что на каждом последующем шаге построения пила, образованная катетами «фрактальных» треугольников, все теснее прижимается к гипотенузе исходного треугольника, однако периметр пилы остается постоянным на любом шаге (и равным сумме катетов исходного треугольника). Может показаться, что возникает противоречие (мол, после перехода к пределу получим гипотенузу, равную сумме катетов), однако это не так. Объяснение имеется, например, в интересной книжке [2].



[1] Здесь нужно уточнить, к какому именно катету мы будем проводить перпендикуляр. Условимся действовать таким образом, чтобы обход вершин в порядке $C - C_1 - A_1$ совершался бы *по часовой стрелке*.

Третий прямоугольный фрактал

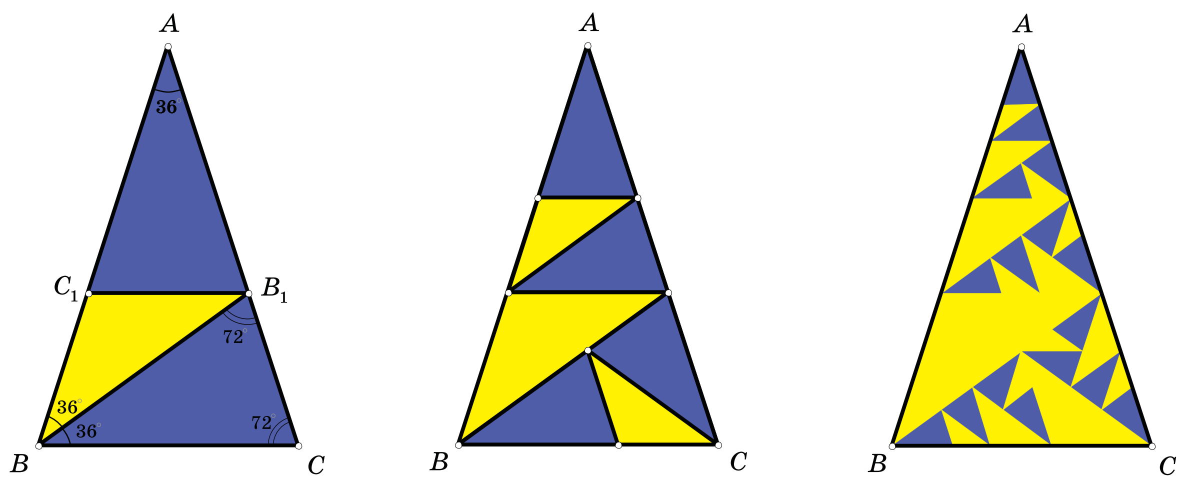
Добавим в предыдущую конструкцию $T_3^1 = \Delta A_1B_1C$ с коэффициентом подобия $k_3 = \dfrac{ab}{c^2}$. Уравнение размерности тогда запишется, как $a^{2d} + b^{2d} + (ab)^d = c^{2d}$. Конечно, в этом случае $d_0 > 1$. Отметим, что в частном случае $\angle A = \angle B = \dfrac{\pi}{4}$ получается знаменитая *салфетка Серпинского* (см. далее *k*-«салфеточный» фрактал).



«Золотой» фрактал

Пусть T_0 – равнобедренный треугольник с углами $\angle A = \dfrac{\pi}{5}$, $\angle B = \angle C = \dfrac{2\pi}{5}$, BB_1 – биссектриса угла B и B_1C_1 – отрезок, параллельный BC[2].

Здесь $N = 2$, $T_1^1 = \Delta AC_1B_1$, $T_2^1 = \Delta B_1BC$, причем эти треугольники равны. Используя свойство биссектрисы и подобие, несложно показать, что $k_1 = k_2 = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \dfrac{1}{\varphi}$, где $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ – *золотое сечение*[3]. Имеем: $d_0 = \ln\dfrac{1}{2} : \ln\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1{,}440$.



[2] Для определенности один из двух углов при основании выбираем так, чтобы обход: «A – выбранная вершина при основании – оставшаяся вершина при основании» совершался бы *против часовой стрелки*.

[3] Именно в таком отношении следует разделить отрезок, чтобы его длина относилась к длине большей части, как длина большей части – к длине меньшей.

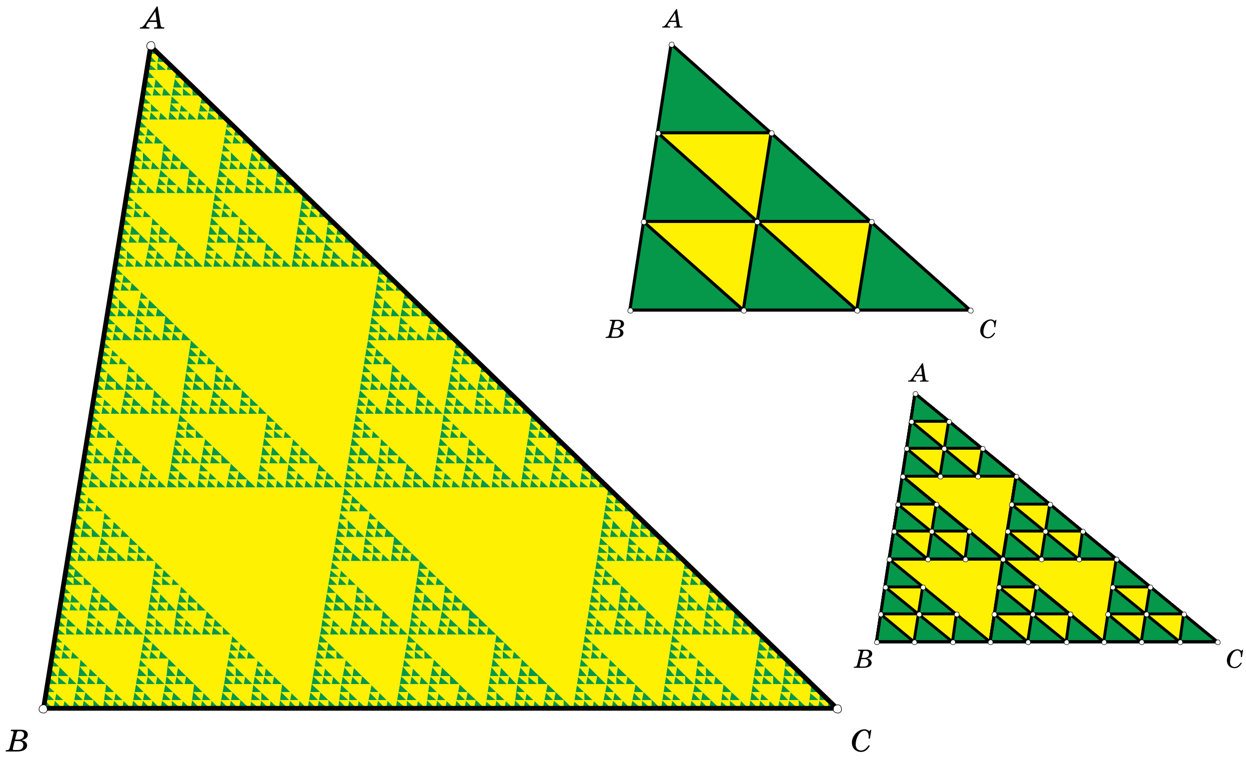
k-«салфеточный» фрактал

Разделим каждую сторону произвольного треугольника ABC на k ($k \geq 2$) одинаковых частей. Затем через точки деления проведем параллели к сторонам треугольника. Исходный треугольник разбивается на k^2 одинаковых треугольников, каждый из которых подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{1}{k}$. Наконец, выберем из них $1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k^2+k}{2}$ треугольников (способ выбора ясен из рисунка, соответствующего случаю $k = 3$). Это — первый шаг в построении *k-салфетки* (где $N=\frac{k(k+1)}{2}$ и $k_1=\ldots=k_N=\frac{1}{k}$).

Размерность вычисляется по формуле $d_0(k)=\ln\left(\frac{k^2+k}{2}\right):\ln k$. Понятно, что $d_0(k) > 1$ для всех $k > 1$, так как $\frac{1}{k}\cdot\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k+1}{2}>1$.

Например, для $k = 3$ $d_0(3)=\frac{\ln 6}{\ln 3}\approx 1{,}631$.

В случае $k = 2$ фрактал называется *салфеткой Серпинского*, здесь $d_0(2)=\frac{\ln 3}{\ln 2}\approx 1{,}585$.



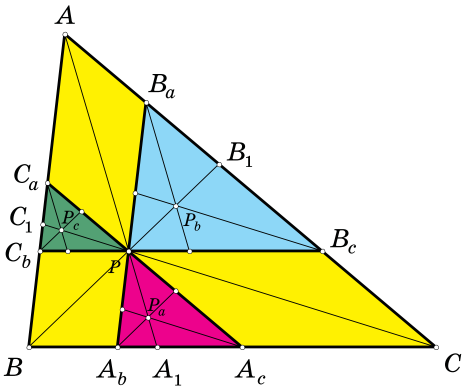
«Параллельный» фрактал

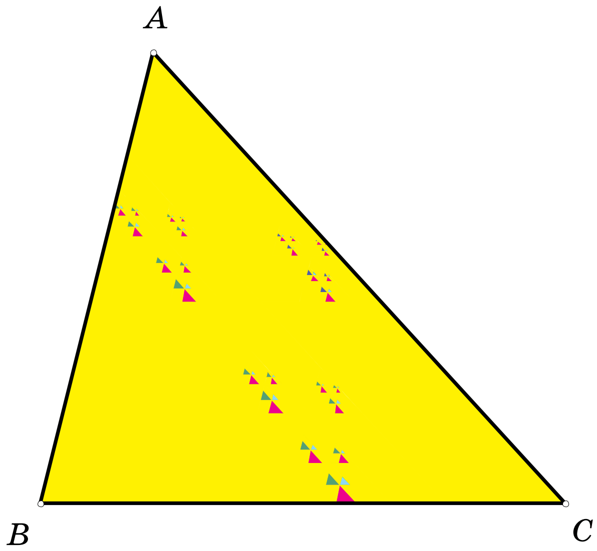
Внутри треугольника T_0 выберем точку P, через которую проведем прямые, параллельные сторонам треугольника и отметим точки пересечения этих прямых со сторонами.

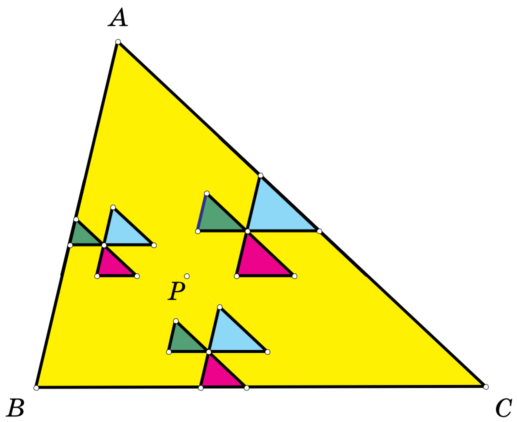
Положим $N = 3$, $T_1^1=\Delta PA_bA_c$, $T_2^1=\Delta PB_aB_c$, $T_3^1=\Delta PC_aC_b$. (И P_a, P_b, P_c — точки, соответствующие точке P, как соответственные точки подобных треугольников).

Очевидно, $k_1 = \dfrac{PA_1}{AA_1}$, $k_2 = \dfrac{PB_1}{BB_1}$, $k_3 = \dfrac{PC_1}{CC_1}$. Но по известной *теореме Жергонна* (см. [3], [6, задача 4.49]), $\dfrac{PA_1}{AA_1} + \dfrac{PB_1}{BB_1} + \dfrac{PC_1}{CC_1} = 1$, и потому $d_0 = 1$.

Легко также проверить, что сумма периметров всех треугольников, полученных на произвольном шаге построения параллельного фрактала, есть величина постоянная и равная периметру исходного треугольника. Постоянной была и сумма периметров треугольников, возникающих при построении второго прямоугольного фрактала (тоже с единичной размерностью). Это совпадение не случайно. Действительно, если $d_0 = 1$, то $d_0 = k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 1$ и если периметр исходного треугольника равен P_0, то на первом шаге построения сумма периметров $P_1 = k_1 \cdot P_0 + k_2 \cdot P_0 + \ldots + k_n \cdot P_0 = (k_1 + k_2 + \ldots + k_n) \cdot P_0 = P_0$. Очевидно тогда, что она будет такой же и на следующих шагах.







Ортофрактал

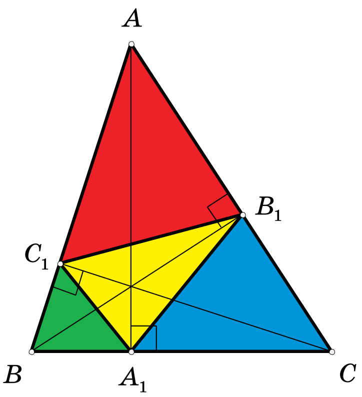
Рассмотрим остроугольный треугольник T_0 и его ортотреугольник $A_1B_1C_1$ (образованный основаниями высот). Положим $N = 3$, $T_1^1 = \Delta AB_1C_1$, $T_2^1 = \Delta BA_1C_1$, $T_3^1 = \Delta CB_1A_1$.

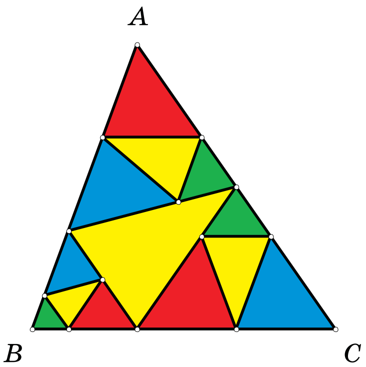
Как известно (см. [3], [6, задача 1.53]), $\angle AC_1B_1 = \angle C$, $\angle AB_1C_1 = \angle B$ и т.д.[4], а $k_1 = \cos\angle A$, $k_2 = \cos\angle B$, $k_3 = \cos\angle C$, и уравнение размерности имеет вид: $\cos^d\angle A + \cos^d\angle B + \cos^d\angle C = 1$.

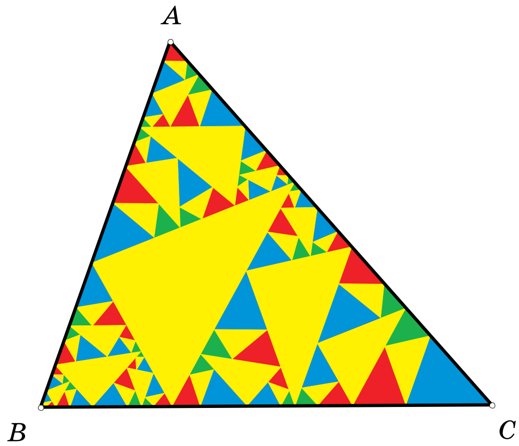
[4] О прямых типа B_1C_1 и BC говорят в таких случаях, что они *антипараллельны*.

Понятно, что $d_0 > 1$, так как в любом треугольнике справедливо равенство: $\cos\angle A+\cos\angle B+\cos\angle C=1+\dfrac{r}{R}>1$, где r — радиус вписанной, а R — радиус описанной окружности (см. [3], [6, задача 12.40]).

Отметим, что в случае равностороннего треугольника $(\angle A=\angle B=\angle C=\dfrac{\pi}{3})$ вновь получается *салфетка Серпинского.*

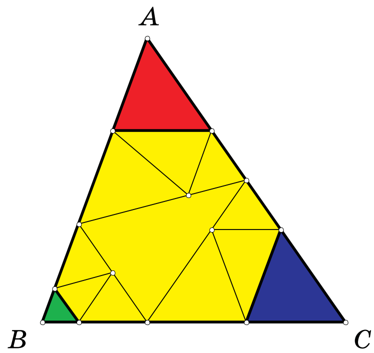






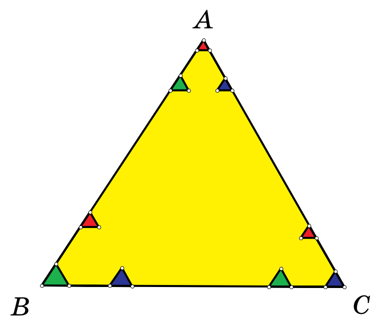
О фракталах с размерностью $d_0 < 1$

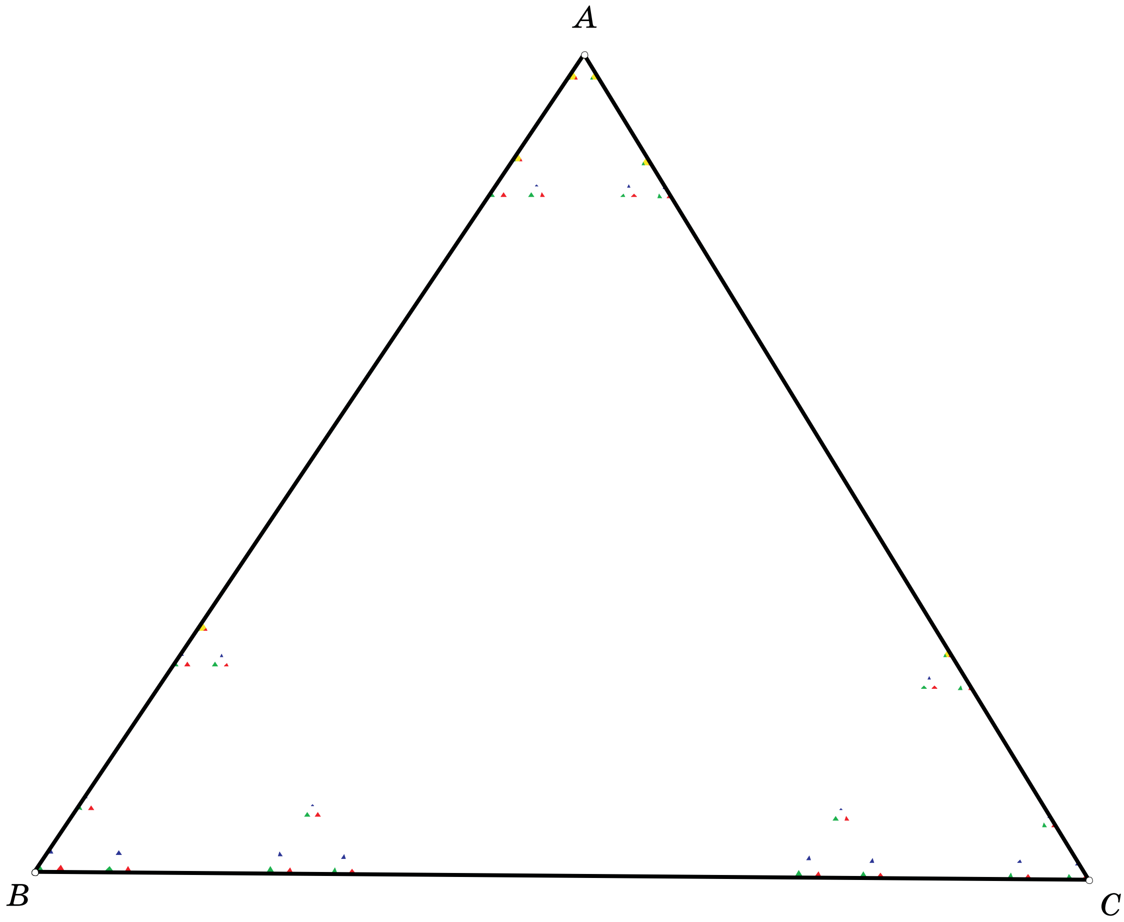
Среди всех рассмотренных выше примеров нам так ни разу и не встретился фрактал с размерностью, меньшей 1. Не следует, однако, думать, что такие фракталы представляют собою некую редкость. На самом деле, *из абсолютно любого треугольного фрактала можно легко сконструировать фрактал с размерностью меньшей, чем единица.* Достаточно всего лишь пропустить первый шаг построения и начать сразу со второго, выбрав при этом среди N^2 треугольников любые N с различными коэффициентами подобия. Их-то мы и возьмем за основу для построения нового фрактала. Его коэффициенты подобия $k_1' = k_1^2$, ..., $k_N' = k_N^2$, а $d_0' < 1$ в силу неравенства $k_1^2+\ldots+k_N^2<1$.



Проиллюстрируем сказанное, воспользовавшись предыдущим фракталом. На втором шаге построения ортофрактала выберем три треугольника, примыкающие к вершинам исходного, и далее будем строить новый фрактал, считая эти треугольники для него «стартовыми».

Недостатком фракталов с размерностью, меньшей единицы, является их *ненаглядность* (в прямом смысле) Так, на рисунке, изображающим четвертую итерацию только что описанного фрактала (см. следующую страницу), пришлось удалить бо́льшую часть желтого фона, чтобы можно было бы хоть что-то разглядеть. И это естественно — размерность-то меньше единицы, поэтому фрактал «меньше» («хуже», «тоньше»...) линии.





Нечто подобное, должно быть, изобразил однажды всем известный персонаж шведской писательницы Астрид Линдгрен:

> Малыш вновь огляделся по сторонам.
> — Ну, а где твои картины с петухами? Они что, тоже взорвались? — язвительно спросил он Карлсона.
> — Нет, они не взорвались, — ответил Карлсон. — Вот, гляди. — И он указал на пришпиленный к стене возле шкафа лист картона.
> На большом, совершенно чистом листе в нижнем углу был нарисован крохотный красный петушок.
> — Картина называется: «Очень одинокий петух», — объяснил Карлсон.
> Малыш посмотрел на этого крошечного петушка. А ведь Карлсон говорил о тысячах картин, на которых изображены всевозможные петухи, и все это, оказывается, свелось к одной красненькой петухообразной козявке!
> — Этот «Очень одинокий петух» создан лучшим в мире рисовальщиком петухов, — продолжал Карлсон, и голос его дрогнул. — Ах, до чего эта картина прекрасна и печальна!..

Фрактал трех равных треугольников

Сразу предупредим читателя, что математическая часть этого пункта существенно отличается от остальных — для ее понимания необходимо владеть такими понятиями, как *трилинейные координаты, изогональное и изотомическое сопряжения.* (Обо всем этом можно прочесть в [8], [6, гл. 14, § 6].)

Попробуем найти *трилинейные координаты* точки P (то есть, с точностью до общего множителя, длины перпендикуляров, опущенных из точки на стороны треугольника), обладающей следующим свойством: эта точка порождает три одинаковых треугольника, вписанных в исходный треугольник ABC и *обратно* ему *подобных*: $\Delta PB_aC_a \sim \Delta A_bPC_b \sim \Delta A_cB_cP \sim \Delta ABC$ — с одним и тем же коэффициентом подобия k[5].

Введем обозначения: $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$, $\angle C_bPB_c=\phi_\alpha$, $\angle C_aPA_c=\phi_\beta$, $\angle B_aPA_b=\phi_\gamma$ и h_a, h_b, h_c — перпендикуляры к сторонам BC, AC, AB, опущенные из точки P.

С учетом того, что $PC_b = PB_c$, мы имеем $\angle PB_cC_b=\frac{\pi-\phi_\alpha}{2}$. Воспользовавшись тем, что $\angle PB_cA_c=\beta$, получим $\angle A_cB_cC=\frac{\pi+\phi_\alpha}{2}-\beta$. Из тех же соображений $\angle B_cA_cC=\frac{\pi+\phi_\beta}{2}-\alpha$. А так как суммы углов треугольников B_cA_cC и ABC равны π, найдем, что $\frac{\phi_\alpha+\phi_\beta}{2}=\pi-2\gamma$. Но $\phi_\alpha+\phi_\beta+\phi_\gamma=\pi \Rightarrow \phi_\gamma=4\gamma-\pi$. Аналогично, $\phi_\alpha=4\alpha-\pi$, $\phi_\beta=4\beta-\pi$.

Отметим, что при выводе этих соотношений мы получили ограничения на углы исходного треугольника: $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}<\gamma<\frac{\pi}{2}$. Очевидно, в случае других значений углов, мы также пришли бы к трем одинаковым треугольникам, но только некоторые вершины этих треугольников лежали бы на продолжениях сторон исходного треугольника и некоторые треугольники имели бы непустое пересечение.

Наконец, $PC_b=ka \Rightarrow h_a=ka\cos\frac{\phi_\alpha}{2}=ka\sin 2\alpha \sim a^2\cos\alpha$.

Длины других перпендикуляров определяются аналогично, и потому трилинейные координаты точки P имеют следующий вид: $(a^2\cos\alpha : b^2\cos\beta : c^2\cos\gamma)$.

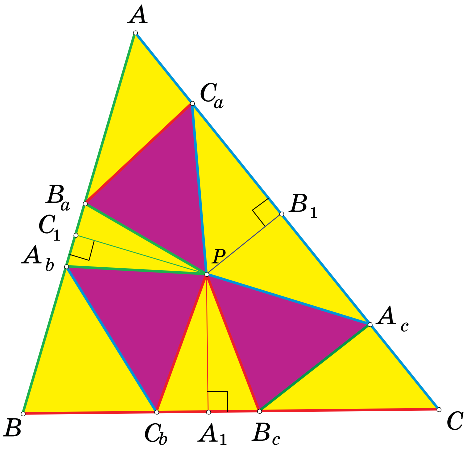
Поскольку координаты центра описанной окружности — $(\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma)$, его изотомического образа — $\left(\frac{1}{a^2\cos\angle A}:\frac{1}{b^2\cos\angle B}:\frac{1}{c^2\cos\angle C}\right)$ и изогонального образа этой точки — $(a^2\cos\alpha : b^2\cos\beta : c^2\cos\gamma)$, то мы доказали, что *$P$ является изогональным образом изотомического образа центра описанной окружности O.*

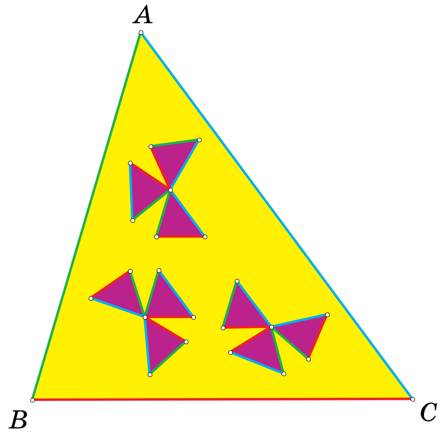
Теперь мы готовы построить наш фрактал.

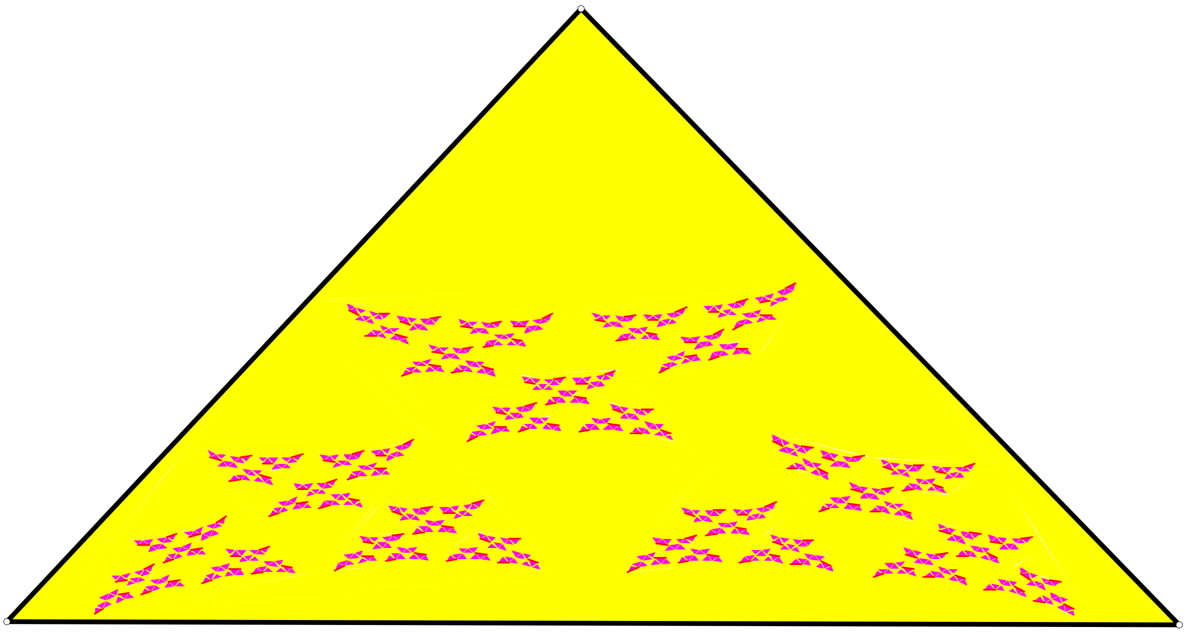
Возьмем треугольник T_0 с углами $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}<\gamma<\frac{\pi}{2}$. Чтобы построить вершины трех одинаковых треугольников, подобных T_0, сначала мы строим с помощью указанных преобразований точку P, затем проводим перпендикуляр h_a и две симметричные прямые, проходящие через P и образующие углы $2\alpha-\frac{\pi}{2}$ с h_a — и т.д. (см. рис. на следующей странице).

---

[5] Обратное подобие означает, что соответствующие подобные треугольники *по-разному ориентированы*. К примеру, если направление обхода вершин треугольника $A - B - C$ противоположно движению часовой стрелки, то направление обхода соответствующих вершин ему подобного треугольника $P - B_a - C_a$ совпадает с движением часовой стрелки — и т.д.







Более подробные сведения о конструкции, связанной со вписанными и равными подобными треугольниками заинтересовавшийся ею читатель найдет в статье [9], где рассмотрены случаи всевозможного подобия, а не только одного лишь обратного.

Размерность d_0 фрактала удовлетворяет условию $d_0 = \ln\frac{1}{3} : \ln k$, где k – коэффициент подобия. Остается лишь определить значение k.

Ясно, что $2S = ah_a + bh_b + ch_c$, где S – площадь треугольника ABC.

С учетом того, что $h_a = ka\sin 2\alpha$ (и еще двух похожих равенств для других перпендикуляров), получим, что $k = 2S : (a^2\sin 2\alpha + b^2\sin 2\beta + c^2\sin 2\gamma)$.

Но это выражение можно привести к гораздо более симпатичному виду, а именно: $k = \dfrac{1}{3 - \left(\dfrac{OH}{R}\right)^2}$, где R – радиус описанной окружности, O – центр описанной окружности, и H – ортоцентр.

При выводе используем следующие известные соотношения для углов треугольника (они имеются в [6, гл. 12], но в их справедливости легко убедиться самостоятельно):

$$S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,\ \ a^2 = 4R^2 \sin^2\alpha,$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

$$\sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma = -4 \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma,$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = 9R^2 - OH^2.$$

Стало быть, $a^2 \sin 2\alpha + b^2 \sin 2\beta + c^2 \sin 2\gamma =$

$$= 2R^2\big((1-\cos 2\alpha)\sin 2\alpha + (1-\cos 2\beta)\sin 2\beta + (1-\cos 2\gamma)\sin 2\gamma\big) =$$

$$= 2R^2(4\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma + 2\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma) =$$

$$= 8R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma (1 + 4\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma).$$

Отсюда $k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + 4\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}$.

Но $1 + 4\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = 1 + 2((\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) - 2) =$

$$= \frac{9 - \left(\frac{OH}{R}\right)^2}{2} - 3 = \frac{3 - \left(\frac{OH}{R}\right)^2}{2}.$$

Поэтому $k \geq \frac{1}{3}$ и $d_0 \geq 1$. Причем $d_0 = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3} \Leftrightarrow O = H$, то есть треугольник ABC — правильный.

Литература

1. *Божкин С., Паршин Д.* Фракталы и мультифракталы. М.-Ижевск, 2001.
2. *Дубнов Я.* Ошибки в геометрических доказательствах. М., 1961 (http://ilib.mirror1.mccme.ru/plm/djvu/v11/directory.djvu)
3. *Ефремов Д.* Новая геометрия треугольника. Одесса, 1902 (http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/ngt/ngt.djvu).
4. *Келли Д.* Общая топология. М., 1981.
5. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М., 2002.
6. *Прасолов В.* Задачи по планиметрии. М., 2007.
7. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. М.-Ижевск, 2001.
8. *Kimberling C.* Triangle Centers and Central Triangles. Winnipeg, 1998.
9. *Myakishev A.* On the circumcenter and related points [Электронный ресурс] // Forum Geometricorum, http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200302index.html.

Вернуться к содержанию

Учим математике

Обучение с помощью серий задач[1]

ПИСАРЕНКО Игорь Борисович
учитель математики лицея № 1557
и школы «Интеллектуал» г. Москвы
pib_1@mail.ru

> Это не простое собрание задач на одну тему. Их расположение должно побудить читателя к самостоятельной работе и привить ему навыки творческого мышления.
>
> *Д. Пойа.* Задачи и теоремы анализа

Идею обучения анализу с помощью серий задач впервые выдвинул венгерский математик Д. Пойа и реализовал ее, совместно с Г. Сеге, в знаменитом двухтомнике задач. В этой статье я попытаюсь обосновать полезность применения идеи Д. Пойа к школьной математике. Начнем с «детской» серии.

1) Как в три приема положить в холодильник слона? (Открыть холодильник. Положить туда слона. Закрыть холодильник.)

2) Как в четыре приема положить в холодильник жирафа? (Открыть холодильник. Достать оттуда слона. Положить жирафа. Закрыть холодильник.)

3) Слона и жирафа заставили бежать стометровку. Кто победит? (Конечно слон, ведь жираф сидит в холодильнике.)

Эта шуточная серия хорошо иллюстрирует одну характерную особенность серий задач, которую отметил еще Д. Пойа: «Многие задачи, которые, будучи предложены изолированно, были бы неприступны, здесь окружены задачами подготовительного и пояснительного характера и преподнесены в такой связи, что без особого труда могут быть осилены самостоятельно».

[1] Текст с небольшими изменениями перепечатан из сборника «Архимед» (Вып. 5. М., 2009).

В российской педагогической литературе широко описан метод листочков. Особенно часто он применяется на кружках. Ребята получают листочек с несколькими задачами на заданную тему и до конца занятия должны их самостоятельно решить и сдать преподавателю. Причем порядок решения задач не имеет большого значения, и решение одной задачи не очень облегчает решение другой. В этом состоит различие метода листочков и метода серий. В серии порядок следования задач очень важен. Первая задача серии должна быть очень легкой для решения. И если ученик решил предыдущую задачу серии, он должен иметь возможность легко решить следующую задачу.

В правильно составленной серии большинство учащихся должно решить самостоятельно бóльшую часть задач, лишь изредка прибегая к помощи преподавателя. С помощью серий задач мы можем формировать и закреплять формальные и неформальные навыки по решению математических задач. Приведем примеры некоторых серий и прокомментируем их.

Перевод бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь

1) $x = 0{,}3333333...$
2) $x = 0{,}7777777...$
3) $x = 0{,}98989898...$
4) $x = 0{,}4252525...$
5) $x = 5{,}2766666...$
6) Сформулируйте правило перевода десятичной дроби в обыкновенную дробь.

Комментарий. Первая задача служит для создания иллюзии у учащихся, что они все могут сами. Критическая трудность – во второй задаче, детям тяжело работать с бесконечностью. Подсказка учителя: «Если бы мы знали $y = 7{,}777...$ смогли бы мы найти x?» Со всеми остальными переходами учащиеся могут справиться самостоятельно. Если нет, мы им немного поможем. В итоге у учащихся создается иллюзия, что они сами вывели правило (ну, помог учитель немного в одном или двух местах). А правило, которое вывел и сформулировал сам, уже тяжело забыть.

Формула корней квадратного уравнения

Образец:
$x^2 - 9 = 0$
$x^2 = 9$
$x = 3$ или $x = -3$

Решить:
1) $x^2 + 2x + 1 - 9 = 0$
2) $x^2 + 2x - 8 = 0$
3) $x^2 + 6x + 5 = 0$
4) $x^2 + 2\cdot\frac{3}{2}\cdot x + 2 = 0$
5) $x^2 + 3x - 10 = 0$
6) $x^2 - x - 3 = 0$
7) $3x^2 + 12x - 8 = 0$
8) $x^2 + px + q = 0$
9) $ax^2 + bx + c = 0$

Комментарий. Обучающая серия должна решать только одну задачу, не отвлекаясь на дополнительные сложности. Поэтому все коэффициенты в серии хорошие, корней всегда два, и до шестой задачи они рациональные, а до четвертой – целые. Задач в серии должно быть, с одной стороны, как можно меньше, а с другой стороны, все переходы должны быть доступны учащимся.

Все это проверяется экспериментально. Сначала делаем рабочую серию, при необходимости добавляя промежуточные вспомогательные задачи; для более слабых детей должна быть разработана система подсказок. Далее оптимизируем серию, выбрасывая ту или иную задачу и наблюдая за решаемостью.

Формула суммы геометрической прогрессии

Задача: Научиться находить суммы членов геометрических прогрессий.

$q = 2$ $S_1 = 1$
$S_2 = 1 + 2 = 3$
$S_3 = 1 + 2 + 4 = 7$
$S_4 = 1 + 2 + 4 + 8 = ?$
$S_{100} = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + ? = ?$
$S_n = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + ? = ?$

$q = 3$ $S_1 = 1$
$S_2 = 1 + 3 = 4$
$S_3 = 1 + 3 + 9 = 13$
$S_4 = 1 + 3 + 9 + 27 = ?$
$S_{100} = 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + ? = ?$
$S_n = 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + ? = ?$

$q = 4$ $S_{100} = 1 + 4 + 16 + 64 + \ldots + ? = ?$
$S_n = 1 + 4 + 16 + 64 + \ldots + ? = ?$

q – любое $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + ? = ?$
Докажите последнюю формулу.
Контрольный вопрос: $S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + ? = ?$

Комментарий. Критическая задача в этой серии, – задача о вычислении S_{100} при $q = 3$. Подсказка такая: «Мы хотим, чтобы $S_n = 3^n - 1$ т.е. $S_1 = 2$, $S_2 = 8$, $S_3 = 26$. А у нас?»

Серии задач можно использовать не только для получения новых формул, но и для закрепления и отработки навыков применения этих формул для решения задач. Для этого нужно придумать и предложить учащимся учебные серии. Каким образом их составлять? Прежде всего, в большом навыке мы должны выделить ряд поднавыков. В навыке «применение формулы для корней квадратного уравнения» я, например, выделил такие поднавыки: «коэффициенты», «дискриминант», «неполные», «перенос влево» ($3x^2 - 1 = 4 + x - 6x^2$), «иррациональные корни и коэффициенты», «почти квадратные» ($(x + 2)(4x - 5) = -3$), «дроби» $\left(\frac{(x-1)^2}{5} - \frac{x+4}{6} = \frac{2x-2}{6}\right)$, «идея замены», «биквадратные», «квадратичная замена» ($(x^2 + x)^2 - 4(x^2 + x) + 16 = 0$), «модуль», «параметр», «четный большой b».

Для отработки элементарного поднавыка предлагаю использовать серию из четырех задач следующих типов:

а) образец;

б) аналог образца (отличается от образца лишь числами);

в) усложнение-1 (легко сводится к образцу);

г) усложнение-2 (для сведения к образцу требуется некоторое усилие).

Для домашнего задания рекомендую давать аналоги б) и в).

Приведу несколько конкретных примеров.

Коэффициенты

а) $x^2 - 10x + 9 = 0$

$a = 1$ $b = -10$ $c = 9$

$$D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4\cdot 1\cdot 9 = 100 - 36 = 64 \geq 0$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2\cdot a} = \frac{-(-10)+\sqrt{64}}{2\cdot 1} = \frac{10+8}{2} = 9$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2\cdot a} = \frac{-(-10)-\sqrt{64}}{2\cdot 1} = \frac{10-8}{2} = 1$$

б) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

в) $0{,}25x^2 - 6x + 36 = 0$

г) $x^2 - 4 = 0$

Идея замены

а) $x - 12\sqrt{x} + 35 = 0$ Замена $\sqrt{x} = t$

б) $x = 5 + 4\sqrt{x}$

в) $x - 3 + 2\sqrt{x-3} = 12$

г) $x = 32 + 2\sqrt{x+3}$

Биквадратные

а) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

б) $9x^4 + 23x^2 - 12 = 0$

в) $(x+2)^4 - 13(x+2)^2 + 36 = 0$

г) $(x-1)^4 - x^2 + 2x - 73 = 0$

Список поднавыков можно получить, анализируя учебники и задачники. По каждой теме выделяем набор серий и порядок их следования. Далее каждый преподаватель сам выбирает тот набор серий, которые должны выполнить его ученики. Если класс слабый, преподаватель может детализировать серию, разбив ее на ряд подсерий, уменьшив шаг между задачами и увеличив число повторов. Если класс сильный, то можно объединить некоторые серии, уменьшив число задач и увеличив тем самым сложность перехода от одной к другой.

Таким образом производится подстройка серий под конкретный класс. Возможна подстройка и под конкретного учащегося. Допустим, учащийся не смог самостоятельно в биквадратной серии перейти от задачи б) к задаче в); в таком случае можно немного подсказать учащемуся, дав промежуточную задачу $t^4 - 13t^2 + 36 = 0$, а для контроля понимания сгенерировать аналогичную серию. Для учащегося, который освоил навык, никаких проблем она представлять не будет, а для того, кто не освоил, это будет совершенно новая задача. Тем самым даже у слабого ученика мы сможем создать иллюзию успешного обучения. Из трех задач он не решает только одну. Мы же, не выдавая секрета, можем снова и снова возвращать его к проблемному месту, варьируя подсказки до тех пор, пока он не преодолеет барьер.

Серии задач легко использовать для формирования неформализуемых навыков (например, навыков решения логических задач). Поэтому их удобно применять на кружках, формируя те или иные умения по решению нестандартных задач.

Приведем несколько примеров.

Мудрецы

Задача 1. В поезде едут два мудреца. Внезапно поезд въезжает в туннель, и после того, как становится светло, каждый из мудрецов видит, что лицо его коллеги испачкано сажей, влетевшей в окна вагона. Они начинают смеяться друг над другом, однако внезапно самый сообразительный мудрец догадывается, что его лицо тоже испачкано. Как ему это удалось?

Задача 2. В поезде едут три мудреца.

Задача 3. В поезде едут пять мудрецов.

Задача 4. В поезде едут 100 мудрецов.

Комментарий. Первую задачу серии решить довольно легко. Вторую саму по себе уже нет, а вот сведением к первой просто. Третья задача напрямую к второй не сводится, надо рассматривать промежуточную задачу про четырех мудрецов. Для того, чтобы аккуратно решить последнюю задачу, надо рассмотреть переход от произвольного количества мудрецов к количеству, на единицу большему. В этой серии мы неявно формируем навыки сведения одной задачи к другой, навык использования метода математической индукции.

Кучки монет

Задача 1. Имеются две кучки монет. В каждой кучке по две монеты. В одной кучке все монеты фальшивые. Настоящая монета весит 10 грамм, а фальшивая – на один грамм меньше. Как с помощью одного взвешивания на пружинных весах, показывающих вес в граммах, определить кучку с фальшивыми монетами?

Задача 2. Имеются десять кучек монет. В каждой кучке по десять монет. В одной кучке все монеты фальшивые. Настоящая монета весит 10 грамм, а фальшивая – на один грамм меньше. Как с помощью одного взвешивания на пружинных весах, показывающих вес в граммах, определить кучку с фальшивыми монетами?

Задача 3. Имеются десять мешков монет. В некоторых мешках все монеты фальшивые. Настоящая монета весит 10 грамм, а фальшивая – на один грамм меньше. Как с помощью одного взвешивания на пружинных весах, показывающих вес в граммах, определить все мешки с фальшивыми монетами?

Задача 4. Имеются десять мешков монет. В одном мешке все монеты фальшивые. Все фальшивые монеты имеют один вес, а все настоящие – другой, разность этих весов неизвестна. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах, показывающих разность веса на чашках в граммах, определить мешок с фальшивыми монетами?

Комментарий. Критический переход в этой серии – это переход от первой задачи ко второй. Не все решения первой задачи переносятся на вторую. Чтобы найти нужное решение, надо перебрать все решения первой задачи.

Магические квадраты

1. Можно ли составить магический квадрат 3 на 3 из девяти первых натуральных чисел?
2. Можно ли составить магический квадрат 6 на 6 из тридцати шести первых простых чисел?
3. Два игрока играют в такую игру: каждый игрок по очереди берет карточки с числами от 1 до 9. Выигрывает тот игрок, у кого на любых трех карточках в сумме получится 15. Кто выиграет при правильной игре и как он должен играть?
4. Можно ли составить магический квадрат 5 на 5 по произведению из 25 первых натуральных чисел?

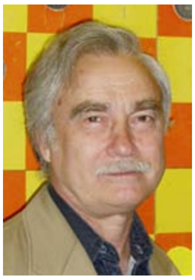
Комментарий. Помимо всего прочего эта серия служит для разрушения вредной привычки сводить все к последней решенной задаче. Здесь третья задача сводится к первой, а не ко второй, а четвертая аналогична второй, а не третьей. Дети должны быть готовы использовать любую из решенных ранее задач.

* * *

По моему мнению, серии задач – это удобный и универсальный способ формирования того или иного навыка. Серии задач не перегружены информацией, при решении ученик не должен помнить внешних, навязанных ему правил. Наоборот, в процессе решения задач он естественно формирует свои правила, так как ему удобно, поэтому и проблем с запоминанием не возникает. Жесткое внешнее управление учебной деятельностью заменяется мягким, через подбор задач, и у учащегося возникает очень полезная иллюзия, что он до всего догадался сам. Серии задач позволяют резко сократить число упражнений, необходимых для формирования и автоматизации того или иного навыка. Далее, если вы самостоятельно научились решать квадратные уравнения, то и через десять лет вы сможете восстановить этот навык. Серии задач годятся как для формирования навыков, так и для их автоматизации и закрепления. Кроме того, их можно использовать и для формирования исследовательских умений и навыков на уроках и на кружках.

Вернуться к содержанию

Рефлексия как средство формирования мотивов учения (из опыта работы)[1]



ЕГОРОВ Анатолий Вадимович
учитель средней общеобразовательной школы № 5 г. Москвы

Желание понимать собственные чувства и действия обнаруживается очень рано, человеку свойственно размышлять над причинами своих поступков. Однако для многих действий может не быть никаких сознательных мотивов. Поэтому для них подыскиваются вторичные объяснения, не касающиеся их исторического происхождения. Например, если мы начнем объяснять первокласснику, что он должен учиться, потому что во всем мире уважают образованных и трудолюбивых людей, приводить в пример великих, но неизвестных ребенку ученых, то вряд ли достигнем желаемого. В лучшем случае ребенок нас вежливо выслушает и быстренько выбросит из головы все наши речи, а в худшем – своими нравоучениями мы можем добиться прямо противоположного результата.

Но как же в таком случае быть, как научить ребенка осознанному и правильному поведению? Именно эту задачу и призвана решать рефлексивная деятельность, которую мы должны уметь организовывать не только на каждом уроке, но и на отдельных его этапах.

Большинство особенностей организации рефлексивной деятельности учащихся на уроке хорошо известны:

– каждый урок рассматривается в системе, учащиеся должны легко прослеживать связь уже изученного и нового материала;

– в структуре урока выделяются основные этапы, а также знания и умения, которые должны усвоить или продемонстрировать учащиеся;

– на определенных этапах урока учащимся может быть предложено проанализировать свою работу (оценить в той или иной форме собственную работу или работу одноклассника);

– в конце урока подводятся итоги, дети вовлекаются в самоанализ: чему научились, какие знания использовали, какие умения проявили и т.п.

В результате этой деятельности ученики учатся выявлять причинно-следственные связи, приобретают навык оценки и самооценки, причем со временем эти навыки дети начинают использовать не только на уроках, но и в повседневной жизни, оценивая не только знания, но и поступки, что в конечном итоге способствует формированию гражданина.

Очень важно не только выработать у ребенка навык самооценки, но и создать для него ситуацию успеха, что является, помимо всего прочего, еще и одним из важнейших факторов, способствующих сохранению здоровья наших детей.

---

[1] Текст с небольшими изменениями перепечатан из сборника «Архимед» (Вып. 5. М., 2009).

Нами разработана такая система оценки учащихся, которая позволяет ребенку самостоятельно выбирать уровень сложности выполняемого задания, а, значит, и самостоятельно оценивать свой результат. В итоге у учителя отпадает необходимость объяснять, почему поставлена та или иная отметка, то есть фактически устраняется субъективный фактор при оценке ученика.

Рассмотрим составляющие разработанной системы.

Обязательные контрольные работы составляются таким образом, что, например, выполнив из 14 обязательных заданий *любые* 7, ученик знает, что может претендовать только на отметку «3», если выполнил 10 заданий – на «4», если выполнил 12 – на «5» (иногда каждое из заданий оценивается определенным количеством баллов, и тогда оценка зависит от количества набранных баллов, но принцип ее выставления остается тем же). Можно заметить, что отметка «5» ставится, даже если ученик правильно выполнил не все обязательные задания. Делается это намеренно (своего рода «погрешность» на усталость, отсутствие времени, аналогичность некоторых заданий и т.п.). Выполнив определенное число заданий, ученик продемонстрировал все требуемые знания, умения и навыки и получил заслуженную пятерку. Другой, обладающий, возможно, бóльшими способностями, успевает за то же время справиться с заданием большего объема (что может принести ученику более высокий рейтинговый результат, если в данной теме учитываются т.н. «дополнительные баллы», или просто «моральное удовлетворение», порождая в нем дух соревнования и стремление к достижению более высокого результата).

Накопительные задания. Чтобы добиться устойчивого положительного результата при изучении точных наук, необходимо определенные навыки довести до автоматизма, а для этого недостаточно регулярно выполнять только домашние задания. Поэтому учитель *предлагает* учащимся в дополнение к традиционным домашним заданиям решить некоторое количество задач, относящихся к изучаемой теме. Если учащийся соглашается на предложенные условия и выполняет дополнительные задания, то он получает «+» за каждую тему, проработанную таким образом. (Время сдачи работ учащийся определяет самостоятельно: по мере выполнения или же все одновременно. Единственное ограничение – за неделю до выставления рубежной или итоговой оценки.) Эти плюсы учитываются при выставлении четвертной (триместровой или полугодовой) оценки по следующей схеме.

Отметка «5» ставится при условии, что:

– большинство контрольных работ написано на «5» (даже при условии, что ни одно из предложенных дополнительных заданий ребенок не сделал и не сдал) ***или***

– хотя бы за одну контрольную стоит «5», а за все или почти за все (не менее 80%) дополнительных заданий получены «+».

При этом обязательным условием получения пятерки являются, кроме контрольных работ и заданий на дополнительный балл, устные ответы у доски.

(Остальные отметки – «4» и «3» – выставляются аналогично.)

Личный экзамен – это своего рода «последний шанс», предоставляемый ученику в конце года, если он изъявил желание повысить свою итоговую оценку, несмотря на то, что по каким-то причинам не смог выполнить условия, о которых говорилось выше. Имея, например, одну отметку «5» («4» или «3») за контрольную работу и все или почти все (до 80 %) «+» за дополнительные задания, ученик имеет право сдать «личный экзамен». Учащийся составляет его содержание самостоятельно, ориентируясь на предложенные учителем:

– список вопросов, который охватывает все темы программы этого класса;

– список литературы, из которой можно выбрать задания; предполагается, что ученик может выбрать задания любого уровня сложности (наиболее успешным ученикам, если они высказывают подобное желание, предлагается выбрать здания повышенной трудности).

Составляя работу, ребенок не только выбирает задания по темам (не менее трех по каждой из тем), но и демонстрирует известные ему способы их решения (таким образом, осуществляется и повторение, и подготовка собственно к экзамену).

Готовить свой вариант «экзамена» ученик может в течение последнего месяца учебного года (примерно с 25 апреля по 25 мая), после чего он сдает учителю подобранные задачи и на отдельных страницах – решения (оформляется задание произвольно: набирается на компьютере, пишется от руки и т.п.). Затем наступает сам экзамен, во время которого учитель предлагает ученику для решения подобранные им же задачи или аналогичные, составленные кем-то из учащихся. Ученик должен решить заранее оговоренное количество заданий.

Оценка за работу выставляется по принятой в этом классе схеме. Полученная оценка не должна понижать годовую, а только может ее повысить!

Как видно из вышеизложенного, предложенная система работы создает условия, благоприятные для достижения учащимися успешности. Успешность обучения способствует в свою очередь выполнению поставленной изначально задачи – формированию у детей осознанной потребности учиться, так как чаще всего именно достигнутый успех способствует возникновению у ребенка желания добиться большего.

Данную систему работы можно использовать не только на уроках математики, но и на любых других, в том числе и на уроках гуманитарного цикла предметов.

Отметим, что составляющие системы не должны с течением времени сильно меняться. Они могут лишь усложняться и, возможно, ужесточаться, но никак не зависеть от настроения учителя. Именно их стабильность гарантирует тот положительный результат, который выражается, прежде всего, в желании ребенка учиться не ради отметки или из страха перед родителями или учителями, а ради расширения и совершенствования собственных представлений о мире и обществе.

В заключение приведу варианты личных экзаменов, составленных моими учениками.

Личный экзамен Воробьевой Анастасии (5 класс)

1. Вычислить: а) $9{,}52 : 34 \cdot 4{,}5 - 0{,}5 + 3{,}5$; б) $6{,}4 - 1{,}4 \cdot (28{,}5 : 19) + 0{,}5$.

2. Решить уравнение: а) $(524 - m) - 133 = 207$; б) $406 - (451 - m) = 341$; в) $67 - (34 + y) + 56 = 73$; г) $78 + (84 - m) - 13 = 92$; д) $84 - (124 - (x + 3)) = 28$; е) $54 - ((x + 23) - 12) = 31$; ж) $75 : (69 - 4z) = 16$.

3. Найти значение выражения:

а) $(432 + y) - (132 + z)$ при $y = 1249$, $z = 849$;

б) $(b + 745) - (c + 145)$ при $b = 1325$, $c = 525$.

4. Решить задачи (4–6):

а) У Коли несколько монет по 5 рублей и по 10 рублей. Всего 120 рублей. Монет по 5 рублей у него столько же, сколько и по 10 рублей, сколько монет по 5 рублей?

б) В бассейн требуется налить 3888 литров воды. Одна труба может заполнить бассейн за 9 часов, вторая за 12 часов, а третья за 18 часов. За сколько часов заполнят бассейн все 3 трубы, открытые одновременно?

5. а) Найти объем прямоугольного параллелепипеда, если его измерения 48 дм, 16 дм и 12 дм.

б) В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и BC равны, и стороны AD и CD равны, $BC = 34$ см, а CD больше AB на 12 см. Найти периметр этого четырехугольника.

6. а) Для выпечки хлеба отсыпали $\frac{2}{7}$ мешка муки, а после еще $\frac{1}{7}$. Осталось 28 килограммов. Сколько килограммов муки было первоначально в мешке?

б) Когда прочитали $\frac{1}{9}$ книги да еще 9 страниц, то остались непрочитанными 55 страниц. Сколько в книге страниц?

7. Решить уравнение: а) $\frac{5}{18}+15-\frac{7}{18-(x-18)}=\frac{11}{18}$; б) $\frac{37}{76}-\frac{69}{76-x}=\frac{15}{76}$.

8. а) На пошив 4 пододеяльников, 2 простыней и 6 наволочек израсходовали 25,6 метра полотна. На 1 наволочку израсходовали 0,7 метра, что в 3 раза меньше, чем на 1 простыню. Сколько метров ушло на 1 пододеяльник?

б) В пяти корзинках находились ягоды: малина, черника, брусника, смородина и ежевика. Массы этих ягод были 3,25 кг, 3,08 кг, 3,3 кг, 3,2 кг, 3,15 кг. Известно, что (по массе) ежевики было больше черники, но меньше брусники, а малины было меньше смородины, но больше брусники. Найдите массу каждой из этих ягод.

9. а) При обработке 80 т риса получили 60 т. Найдите процент выхода при обработке риса.

б) Утром рыбак поймал 35 карасей, что составило 28% улова карасей за день. Сколько всего карасей поймал рыбак за день?

в) Аня подсчитала, что цена юбки составляет 80% всех ее денег, а цена блузки 60% ее денег. Если дедушка даст ей еще 96 рублей, то она сможет купить обе вещи. Сколько стоят юбка и блузка?

г) В зоопарке обезьяны ежедневно съедают 60 кг фруктов и овощей. Известно, что 27% фруктов и овощей составляют бананы, 33% – морковь, а остальное яблоки. Сколько килограммов яблок съедают обезьяны?

д) В классе учатся 35 человек, из них 60% занимаются в математическом кружке. Сколько человек посещают математический кружок?

е) У учеников класса 93 книги. В первый раз в библиотеку сдали 44 книги, второй раз 50% от количества книг, сданных в первый раз. Сколько процентов всех книг сдали?

ж) Отрезок увеличился на 25%. На сколько процентов надо уменьшить новый отрезок, чтобы получить первоначальный?

з) Отрезок уменьшился на 20%. На сколько процентов надо увеличить новый отрезок, чтобы получился первоначальный?

Личный экзамен Григоряна Роберта (6 класс)

1. Вычислить:

а) $-0{,}6\cdot4-6{,}4\cdot(-0{,}3)-(-8)\cdot(-2{,}4)$; б) $20+\left(7\frac{1}{3}-6\frac{7}{8}\right):\frac{3}{4}-\left(5\frac{1}{4}-4\frac{21}{40}\right):1\frac{9}{20}$.

2. Упростить:

а) $0{,}4\cdot\left(0{,}9-\frac{5}{7}x\right)-0{,}9\cdot\left(0{,}4-1\frac{3}{7}x\right)$; б) $\frac{2}{9}\cdot\left(1{,}8-1\frac{1}{2}a\right)-1\frac{1}{6}\cdot\left(1{,}2-\frac{2}{7}a\right)$.

3. а) Из 21 кг хлопкового семени получили 5,1 кг масла. Сколько масла получится из 7 кг хлопкового семени?

б) Для перевозки груза потребовалось 24 машины грузоподъемностью 7,5 т. Сколько нужно машин грузоподъемностью 4,5 т, чтобы перевезти тот же груз?

4. а) Сначала продали 40% привезенного картофеля, а потом 30% остатка. Сколько процентов привезенного картофеля осталось?

б) Лес занимает 420 га. Ели занимают 63,5% этой площади, а сосны – 29%. На сколько гектаров площадь, занятая елями, больше площади, занятой соснами?

в) Было решено прорыть траншею для водопровода за четыре дня. В первый день прорыли 35,5% всей длины траншеи, во второй день 23% и в третий день 27%. В четвертый день прорыли оставшиеся 2,61 км. Какова длина всей траншеи?

5. Решить уравнения:

а) $\left(\frac{8}{15}x-\frac{4}{5}\right)\cdot(x+0{,}12)=0$; б) $0{,}893x-6{,}54=0{,}894x-3{,}78$.

6. Решить задачи:

а) Турист ехал на автобусе $1\frac{1}{3}$ часа и на поезде $4\frac{4}{15}$ часа. Всего этими видами транспорта турист проехал 456 км. При этом на автобусе он проехал $\frac{3}{16}$ того пути, который он проехал на поезде. С какой скорость турист ехал на автобусе и с какой – на поезде?

б) Автомобиль прошел в 1-й час $\frac{4}{9}$ всего пути, во 2-й час – $\frac{3}{5}$ оставшегося пути, а в 3-й час остальной путь. Известно, что в третий час он прошел на 40 км меньше, чем во второй час. Сколько километров прошел автомобиль в третий час?

7. Выполнить задания:

а) Изобразите на координатной плоскости точки $A(-2;\ 2)$, $B(-1;\ 1)$, $C(0;\ 0)$, $D(1;\ 1)$, $E(2;\ 2)$. Проверьте с помощью линейки, лежат ли эти точки на одной прямой и лежит ли на прямой точка $M(-5;\ 5)$.

б) Даны координаты: (−9; 1), (−8; 0), (−8; −1), (−7; −2), (−4; −2), (−3; 1), (−2; −1), (−1; −2), (4; −2), (5; −1), (6; −1), (7; −2), (10; −2), (10; 0), (8; 1), (5; 1), (2; 3), (−3; 3), (−4; 2), (−4; 1), (−9; 1). Соедините последовательно точки, заданные этими координатами. Что за фигура получилась?

в) Нарисуйте ломаные и отрезки, заданные этими наборами координат. Какие из них пересекаются?

(−1; 2), (−2; −3), (−3; −3), (−4; −2);
(2; 3), (4; 1), (5; 1);
(3; −2), (4; −1), (4; 1);
(−2; −1), (−2; 3);
(4; −2), (5; −3), (6; −3), (7; −2);
(−4; 1), (4; 1).

8. Решить задачи:

а) Пифагора спросили: «Который час?» Пифагор ответил: «До конца суток осталось дважды две пятых того, что уже прошло от начала». Который был час?

б) В классе 13 детей. У мальчиков столько же зубов, сколько у девочек пальцев на руках и ногах. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

Задачи к зачету Екатерины Покровской (6 класс)

1. За весну Обломов похудел на 25%, затем за лето прибавил 20%, затем за осень похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел или поправился Обломов?

2. 5 литров сливок с содержанием жира 35% смешаны с 4 литрами 20% сливок и к смеси добавили 1 литр чистой воды. Какой жирности получилась смесь?

3. Известно, что монеты в 1, 2, 3 и 5 копеек весят соответственно 1, 2, 3 и 5 г. Среди четырех монет по одной каждого достоинства одна бракованная (отличается весом от других). Как с помощью взвешивания на чашечных весах определить бракованную монету?

4. Из 9 монет одна фальшивая (более легкая). Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь определить фальшивую монету?

5. Как, имея 2 сосуда емкостью 5 и 9 литров, набрать из водоема ровно 3 литра?

6. Можно ли, имея лишь 2 сосуда емкостью 3 и 5 литров, набрать из водопроводного крана 4 литра воды?

7. Перед нами три островитянина *A*, *B*, *C*, о каждом из который известно, что он либо рыцарь, либо лжец. (Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Пусть *A* и *B* высказывают следующие утверждения: *A*: «Мы все лжецы». *B*: «Ровно один из нас лжец». Кто такой *B*? Кто такой *C*?

8. Перед нами три островитянина *A*, *B*, *C*, о каждом из который известно, что он либо рыцарь, либо лжец. (Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Пусть *A* и *B* высказывают следующие утверждения: *A*: «Мы все лжецы», *B*: «Один из нас рыцарь». Кто из трех островитян *A*, *B*, *C* рыцарь, а кто лжец?

9. Докажите, что сумма $1 + 2 + 3 + \ldots + 1993$ делится на 1993.

10. Докажите, что сумма *n* последовательных чисел делится на *n*.

Вернуться к содержанию

РОЙТБЕРГ Михаил Абрамович
зав. лабораторией прикладной математики
Института математических проблем биологии РАН
mroytberg@mail.ru

Введение

Очень малая часть школьников получает удовольствие от занятий математикой. В средней школе (я говорю об обычной школе) таких не более одного–двух на класс, чаще – ни одного. То есть большинство учащихся не испытывает радость открытия; когда стараешься получше представить себе то, о чем сказано в условии задачи, ищешь подходы, а потом – вдруг! – понимаешь, как задачу решить.

Почему так происходит? Почему одни дети с удовольствием решают математические задачи, а другие шарахаются от таких задач? Общий уровень развития у «шарахающихся» может быть даже более высоким...

Это статья об игре «Попробуй реши!». Главная цель игры – приобщить к радости математического творчества тех школьников, которые (пока) от математики далеки (хотя и занимаются ею на уроках). Еще одна цель – научить записывать решения, а если говорить более широко – связно и аргументированно излагать свои мысли. Не секрет, что в современной школе этому уделяется недостаточно внимания. И, наконец, последняя цель – научить детей анализировать, как они пришли к решению, что сделали сами, а в чем им помогли.

Эту игру я впервые провел около 15 лет назад на базе детской библиотеки г. Пущино и с тех пор проводил ее много раз в разных школах и учебных лагерях. «Попробуй реши!» рассчитана на школьников 9–13 лет. Для детей младшего возраста и учащихся старше 12–13 лет понадобится корректировка корпуса заданий (возможно, и корректировка правил).

Отмечу, что «Попробуй реши!» перекликается с домашними олимпиадами П.В. Чулкова[1]. Но есть и важные отличия, касающиеся, прежде всего, помощи взрослых и правила определения победителей.

В этой статье я хочу рассказать об игре и поделиться накопленным опытом.

Хочу поблагодарить учителей центра «Азъ» при УВК № 1811 «Измайлово» О.П. Лапину и С.В. Плахотникова, вместе с которыми мы проводили игру с учениками их 4-го класса в 2006/07 учебном году, а также А.И. Сгибнева (школа «Интеллектуал»), без благотворного влияния которого эта статья, скорее всего, не была бы написана.

---

[1] См.: *Чулков П.В.* Математика. Школьные олимпиады: Метод. пособие. 5–6 кл. М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2001.

Что такое игра «Попробуй реши!»

Слово «игра» используется в разных смыслах. Салочки, прятки, шахматы, футбол, дочки-матери, ролевые игры, олимпиады (спортивные и не только), всевозможные викторины – все это игры. Что такое «Попробуй реши!» легче всего понять, если сравнить ее с математической олимпиадой.

Перечислим основные особенности математической олимпиады. Во-первых, в ней участвуют те, кто уже интересуется математикой. Во-вторых, проводится она в определенном месте и в течение достаточно короткого времени (обычно в течение 3–4-х часов). В-третьих, участники решают задачи самостоятельно. В-четвертых, призы получает небольшое (и, как правило, заранее определенное) количество человек. Можно показать хороший результат и не получить ничего только потому, что другие выступили лучше.

В игре «Попробуй реши!» все наоборот. Во-первых, она ориентирована на всех учеников, прежде всего на тех, кто нейтрально (или даже с опаской) относится к школьной математике. Во-вторых, в ходе игры проводится много (не менее 6–7) туров. Задачи решаются в свободное время и решения сдаются в письменной форме. В-третьих, допускается ***любая*** помощь со стороны (об этом чуть ниже). И, наконец, в-четвертых, призы получают ***все*** участники, набравшие в сумме за несколько туров определенное количество баллов. Таким образом, получивший приз ничего не отнимает у других участников.

Последние два пункта – ключевые. Начнем с последнего, но сначала объясним подробнее, как оцениваются решения.

В каждом туре предлагаются 4 задачи (этот и другие числовые параметры игры можно по необходимости менять). Каждая из задач оценивается по пятибалльной шкале. При этом на усмотрение организаторов остается выдача дополнительных баллов за красоту решения, трудность задачи и т.п. Очки, набранные в разных турах, суммируются. Каждый участник, набравший в сумме (неважно за сколько туров) 25 очков, получает приз (обычно символический, но ценный для ученика). Получивший приз участник продолжает играть. Чтобы стать обладателем следующего приза, нужно набрать еще 25 очков и т.д.

В этой игре участники соревнуются, прежде всего, не друг с другом, а с задачами. Вопрос «кто лучше?», важный для детей, не исчезает, но перестает быть доминирующим. Это открывает учителю, проводящему игру, простор для поощрения относительно слабых учеников даже за самые небольшие успехи, способствует выстраиванию между участниками отношений сотрудничества.

Теперь о помощи посторонних. Это проблема, с которой приходится сталкиваться организаторам любых заочных соревнований. Мы предлагаем радикальное решение. Во-первых, разрешена любая помощь. Во-вторых, участник ***обязан*** явно указать, в чем состояла помощь (или написать «Задача решена совершенно самостоятельно»). Если указания о помощи нет, то работа возвращается с просьбой это указание добавить. Как правило, решение, полученное с помощью посторонних, оценивается несколько ниже, чем самостоятельное (см. далее), но тоже приносит автору заслуженные очки.

Нужно сказать, что на первых порах требование об описании помощи не было столь определенным. Мы полагали, что при самостоятельном решении и писать ничего не следует. Опыт показал, что дети пользуются этой лазейкой и «забывают» о помощи. В то же время выяснилось, что подавляющее число детей не пишет «задача решена совершенно самостоятельно», если это не так. Соврать труднее, чем промолчать.

Далее, помогающие — обычно, близкие ребенку люди, поблагодарить их — приятно. Наконец, обозначая помощь, ученик тем самым явно указывает то, что он сделал самостоятельно – это тоже приятно.

Вот несколько характерных примеров. «Дедушка объяснил условие задачи, а решал я сам». «Решала вместе с мамой», «Все сделал сам, а мама проверила». «Решил сам, брат проверил и нашел ошибку», «Бабушка заставила начать решать, а все сделала я сама». Различение того, что ты сделал сам, и того, что ты выполнил с посторонней помощью, — трудно (и не только для ребенка). Важна уже сама попытка ученика проанализировать свою работу. Понятно, что дедушка, объясняя условие задачи, мог в значительной степени объяснить и решение. При желании учитель, проводящий игру, может поговорить об этом с учеником (и дедушкой). Не так важно, что именно объяснили ученику; важно воспитание его «интеллектуальной честности» и способности к самоанализу.

Еще один эффект такого решения проблемы посторонней помощи — возможность установления хорошего контакта между детьми и родителями. Если говорить об участии родителей в школьных делах своих детей, то обычно они выступают в качестве контролеров — не очень удобная позиция для построения доброжелательных отношений. В нашем случае родители и ученик становятся партнерами: они вместе выбирают, что объяснять ученику, а что оставить ему для самостоятельной работы. Можно и полезно принимать и решения родителей (такие иногда появляются) и вводить специальные призы для них.

Игра в одном классе

Хотя задачи могут решаться заочно, без непосредственного контакта организаторов и участников, особенный интерес представляет игра, которая проводится учителем в своем классе. При этом возможно (и, наверное, иногда полезно), чтобы разбор задач проводился внешним специалистом (вместе с учителем или без него). Ниже я опишу, как может проходить игра в классе. По такой же схеме можно проводить игру и в нескольких классах школы; это удобно, например, для малокомплектных школ.

Обычно игра длится 6–7 туров, что примерно соответствует полугодию. В следующем полугодии (если будет желание) можно начать снова. Туры проходят каждые две недели: в расписании выделяется урок (урок математики или дополнительный урок), на котором проводится игра «Попробуй реши!». На первом занятии объясняются правила игры, решаются нестандартные задачи (они дают ученикам представление о том, чем им предстоит заниматься, см. Приложение 1, п. 1) и предлагаются задачи 1-го тура. На каждом следующем занятии разбираются задачи прошедшего тура и выдаются задачи следующего тура. Кроме того, может происходить вручение призов очередным победителям.

К моменту разбора задач ученики сдают тетрадки с решениями. На следующем туре (после проверки) эти тетради возвращаются ученикам. При этом желательно, чтобы в тетрадях были не только проставлены баллы, но и имелись комментарии к решениям. Проверка решений — достаточно большая работа. Если есть возможность, полезно привлечь к этой работе помощников, например, других учителей.

Участие в игре добровольное, однако полезно, чтобы на уроках, посвященных игре, присутствовали все ученики. Поскольку условия задач достаточно просты для понимания, то даже те, кто не решал задачи дома, могут с пользой для себя слушать разбор решений. При проведении игры в центре «Азъ» мы в конце игры провели контрольную работу по нестандартным задачам для всего класса (задания игры выполняли около $\frac{2}{3}$ учеников, но контрольную писали все). Оказалось, что даже те, кто не участвовали в игре активно, многому научились.

Как уже говорилось, основная цель игры состоит в том, чтобы дети научились получать удовольствие от решения задач, от незнакомого им раньше успеха в таком решении. Но чтобы получать удовольствие, нужно решать задачи. Поэтому учителю важно создать в классе атмосферу заинтересованности в игре, сделать игру престижной и просто поддерживать учеников (особенно слабых). Приемы могут быть разнообразными: напоминание классу, индивидуальные подбадривающие разговоры, создание стенда с условиями задач и образцами лучших решений и многое другое. Главное – создать вокруг игры атмосферу праздника и радости.

Остановимся на разборе задач. Трудность состоит в том, что, как правило, ученики тянут со сдачей работ до последнего дня, и к моменту разбора учитель еще не знает, кто и как решил задачи. Таким образом, если, например, на уроке даются задачи 4-го тура, то разбираются задачи 3-го тура, а полностью проверены задачи только 2-го тура. Поэтому учителю приходится самому вести разбор решений, а не давать высказываться ученикам. Естественно, полезно после рассказа спросить, нет ли желающих дополнить решение, показать свое решение и т.п. Можно рискнуть и предложить рассказать решение одной из задач кому-то из учеников. Полезно заготовить дополнительные вопросы «на понимание» решения, за ответы на них тоже можно давать поощрительные баллы. Если после проверки будут обнаружены красивые решения, то к ним можно вернуться и при разборе задач следующего тура.

На разборе мы не зачитывали, кто сколько баллов получил — каждый ученик просто получал свою тетрадку с оценкой. Естественно, ученики могли спросить, почему их решение оценено тем или иным количеством баллов, но разговор об этом происходил не на уроке, чтобы не отвлекать остальных. Для нас оказался неожиданным очень слабый (практически отсутствующий) интерес учеников к критериям, по которым выставляются оценки. Поэтому мы и не стали вырабатывать формальных критериев, ограничившись общими соображениями.

Пять баллов обычно дается за полное решение, в котором не только приведены необходимые рассуждения, но и доказано (объяснено), что других решений нет. При этом у учителя обычно есть довольно большой произвол в том, что считать полным решением — идеальной ясности объяснения добиться трудно, особенно в начале игры. Здесь стоит руководствоваться целью игры — научить ребенка решать задачи и получать от этого удовольствие. Кому-то стоит завысить оценку, а кому-то полезна строгость. Важно, что, благодаря правилам игры, повышая оценку одному ученику, мы ничего не отнимаем у другого. Так же обстоит дело и с учетом несамостоятельности решения. Как правило, мы снимали один балл. Но, повторюсь, цель игры — педагогическая, и учителю, проводящему игру, виднее. Главное условие — чтобы не нарушилось ощущение справедливой игры и чтобы оценки стимулировали ученика.

Таким образом, учитель имеет достаточно гибкую систему выставления баллов, которая позволяет учитывать особенности конкретного ученика, общий уровень решений задачи и т.п. Отметим, что можно начислять баллы даже за решения, сданные уже после того, как разбор был проведен — для некоторых детей запись понятого решения также является серьезной работой.

И, наконец, последнее — учет баллов и награждение. Учитель, естественно, ведет учет баллов. Вести ли его только у себя или завести стенд, на котором будут отмечаться успехи каждого участника, — решать организатору. Оба варианта имеют свои достоинства и недостатки.

С награждением победителей все просто — его нужно сделать максимально праздничным для ученика, с вызовом к доске, аплодисментами всего класса и т.п. Сами призы, мне кажется, не должны быть дорогими, скорее — необычными и уникальными. Для игры в центре «Азъ» мы заказали авторучки с надписью «Попробуй реши!» и инициалами учителей, проводивших игру. Ручки были двух сортов — синие (вручались за первые 25 очков) и красные (вручались за вторые 25 очков, т.е. когда сумма набранных участником баллов достигала 50 очков). Два ученика, набравшие 75 очков, дополнительно получили книги. Желательно, чтобы никто из участников не остался без награды. Обычно, за 6–7 туров каждый участник может набрать 25 очков (из 120–140 возможных). В крайнем случае, можно выдать ученику грамоту или шоколадку — ведь он старался!

О задачах

Перечислим некоторые требования к задачам игры.

1. *Понятность условия.* Условие задачи должно быть понятным. В частности, должно быть ясно, что нужно найти. В идеале условие хотя бы одной задачи в туре должно быть понятно участникам на уровне здравого смысла, вне связи со школьной программой.

2. *Доступность решения.* Задача должна допускать решение, которое можно легко объяснить ученикам. Это важно и для того, чтобы школьнику было легче записать свое решение. В решении должна быть прозрачная идея, поняв которую ученик сможет решать сходные задачи.

3. *Наличие серий задач* (скорее по идеям, чем по сюжетам). Умение применять идеи, усвоенные при решении (или разборе) задачи, для решения новых задач — одно из важнейших умений, которым обучает математика. Для тренировки этого умения полезно включать в игру серии задач, объединенных общей идеей (см. Приложение 1, пп. 2, 3). При этом задачи в серии могут быть связаны общим сюжетом (а могут и не быть связаны). Общность сюжета задач в различных турах имеет скорее психолого-эстетическое значение (это нравится школьникам) и облегчает понимание условий задач.

4. *Наличие задач-исследований.* Как правило, в школьных задачах требуется ответить на один конкретный вопрос. В жизни это не так. Часто бывает необходимо провести исследование, в котором лишь некоторые вопросы сформулированы заранее, а другие возникают в ходе работы. Формулировка этих вопросов сама по себе является важной частью исследования.

Задачи-исследования требуют от участников значительно больше усилий, чем обычные задачи. Их можно включать в игру в качестве отдельного тура (вместо всех четырех обычных задач или части из них давать одну задачу-исследование) и, соответственно, оценивать исходя из большего количества баллов. Пример такой задачи приведен в Приложении 1, п. 4.

Заключение

Игры и соревнования — естественное (как нам кажется) состояние ребенка. В то же время использование соревнований в учебе — вещь опасная, чреватая психологическими травмами. В игре «Попробуй реши!» мы попытались использовать сильные стороны игры, сведя риск «травматизма» к минимуму. При этом игра способствует воспитанию у ребенка интеллектуальной честности и построению хороших отношений между родителями и детьми.

И, наконец, игра учит получать удовольствие от математики и, возможно, помогает полюбить ее.

Приложение 1

1. Задачи вступительного занятия

Задача 1. А. Девочка заменила каждую букву в своем имени ее номером в русском алфавите и записала эти номера подряд. Получилось: 2011533. Как зовут девочку?

Б. Придумайте два имени, которые одинаково записываются цифрами (каждая буква заменяется на ее номер в русском алфавите).

В. Придумайте слово, которое записывается только двойками и единичками.

Задача 2. На столе стояли два одинаковых стакана: один с молоком, другой — с чаем. Молока и чая в стаканах было по 200 г. Из стакана с чаем одну чайную ложку перелили в молоко и аккуратно размешали. Потом одну такую же ложку смеси перелили обратно в чай. Чего оказалось больше — чая в молоке или молока в чае?

Задача 3. Из книги выпал кусок, первая страница которого имеет номер 385, а номер последней страницы записывается теми же цифрами. Сколько листов выпало из книги? Ответ объясни.

2. Пример серии задач с общей идеей и общим сюжетом

Задача 1 (1-й тур). Аня, Боря, Вера и Гена поймали 10 майских жуков. Никто из детей не остался без добычи, и все поймали разное количество жуков. Аня поймала больше всех, а маленькая Вера — меньше всех. Кто поймал больше жуков — мальчики или девочки?

Задача 2 (2-й тур). Аня, Боря, Вера и Гена поймали 13 майских жуков. Никто из детей не остался без добычи, и все поймали разное количество жуков. Аня поймала больше всех, а маленькая Вера — меньше всех. Сколько поймала Вера? Ответ объясни. На следующий день Вера хвасталась, что они с Аней поймали на 2 жука больше, чем мальчики. Не напутала ли Вера?

3. Пример серии задач с общей идеей, но с разными сюжетами

Задача 1 (1-й тур). Маугли попросил пятерых обезьян принести ему орехов. Обезьяны набрали орехов поровну и понесли Маугли. По дороге они поссорились, и каждая обезьяна бросила в каждую другую по ореху. В результате они принесли вдвое меньше орехов, чем собрали. Сколько орехов получил Маугли?

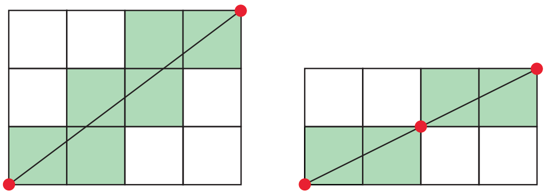
Задача 2 (2-й тур). В шахматном турнире играли 10 шахматистов. Все шахматисты сыграли друг с другом по одному разу. В 25 партиях победили белые, в 20 партиях — черные. Сколько партий закончились вничью?

4. Пример задачи–исследования

На листе бумаги в клеточку обвели прямоугольник размером 199 × 991 клеток. Сколько клеток пересекает диагональ этого прямоугольника? Через сколько узлов (т.е. вершин клеток) проходит диагональ? Ответ объясни. Попробуй дать ответ для произвольного прямоугольника — размером $m \times n$ клеток.

Примечание. Диагональ пересекает клетку, если она заходит «внутрь» этой клетки, а не просто проходит через вершину.

Например, в прямоугольнике 3 × 4 диагональ пересекает 6 клеток и проходит только через два узла — противоположные углы прямоугольника. А в прямоугольнике 2 × 4 диагональ пересекает 4 клетки и проходит через 3 узла.



Подсказка. Попробуй сначала рисовать небольшие прямоугольники. Подсчитай сколько клеток и вершин пересекает в них диагональ. Наверное, ты заметишь какие-нибудь закономерности. Проверь эти закономерности *для нескольких* новых прямоугольников. Попробуй доказать (или объяснить), что твои закономерности выполнены *для* ***всех*** прямоугольников. Опиши, какие прямоугольники ты пробовал, какие закономерности обнаружил.

Приложение 2

Правила оформления работ в игре «Попробуй реши!»

1. Решения сдаются в тонких тетрадях или присылаются по электронной почте в виде файлов в текстовом формате или формате редакторов Word, OpenOffice. Решение каждой задачи начинается с новой страницы.

2. Работа должна быть подписана. Тетрадь подписывается на обложке. В файле подпись должна быть в начале файла.

В подписи нужно указать:

– автора решения (фамилия, имя, адрес для переписки; другие сведения — например, школа и класс, возраст);

– тур игры;

– когда была сдана работа.

Пример:

«ПОПРОБУЙ РЕШИ!»
1-й тур
Работа Ивана Иванова (6 «А», Пущинская школа № 3)
Сдана 29 сентября 1994 г.

3. «Идеальное» решение — это решение, в котором:

– указан правильный ответ или ВСЕ правильные ответы (если возможно несколько ответов);

– доказано (объяснено), что приведенные ответы — правильные и больше ответов нет;

– понятно, как автор работы рассуждал, решая задачу.

Принимаются и приветствуются ЛЮБЫЕ (и не идеальные) решения. Главное чтобы можно было понять, как рассуждал автор работы.

4. П О М О Щ Ь родителей, учителей, друзей, Гарри Поттера, Чебурашки, Винни-Пуха и всех-всех остальных

Р А З Р Е Ш Е Н А !

ЕДИНСТВЕННОЕ УСЛОВИЕ: В начале решения соответствующей задачи нужно указать: «Я советовался с папой», или: «Мама объяснила мне решение, но я все поняла и пишу решение сама», или: «Я решил сам, но учительница проверила работу». Решения без пояснения о полученной помощи (или о том, что никакой помощи не было) не принимаются. Такие решения возвращаются (потом их можно снова сдать, добавив нужное пояснение). Если возможности вернуть решения нет, то считается, что задача решена СОВЕРШЕННО НЕсамостоятельно. Естественно, самостоятельное решение оценивается более высоко.

Ж Е Л А Е М   У С П Е Х А !

Вернуться к содержанию

Задачи

О задачном отделе журнала «Полином»

ФАЙНШТЕЙН Олег Александрович
ведущий отдела задач, г. Лейпциг
ofaynshteyn@gmx.de

Уважаемые читатели!

Редакция журнала «Полином» открывает отдел «Задачи».

Все желающие могут присылать в редакцию журнала либо свои собственные задачи, либо понравившиеся им задачи из разных источников.

Задачи необходимо присылать по электронному адресу: zadachi-polinom@mail.ru, на имя Файнштейна Олега Александровича. Задачи должны сопровождаться полным решением. Если задача заимствована, то обязательно должен быть приведен источник заимствования.

В письме необходимо указать Ф.И.О., предложившего задачу. Желательно также указать данные о месте работы и жительства (страна, населенный пункт).

Задачи и решения необходимо присылать в одном из форматов Word, Pdf, DjVu.

Чтобы задачи вызывали интерес и желание их решить, они должны представлять некоторую трудность для читателей, но в то же время быть посильными. Просьба не присылать задачи, представляющие собой нерешенные проблемы. Такие задачи рассматриваться не будут. Для них существуют специальные научные журналы.

Помимо собственно задач в отделе планируется публиковать статьи, посвященные задачам (методы решения и составления задач, статьи с обзором задач из научно-популярных и педагогических журналов разных стран мира и др.). В общем, все, что связано с миром задач.

Решения задач, предложенных в текущем номере, будут опубликованы в следующем с указанием фамилий правильно решивших ту или иную задачу. Если задача решена различными способами, то будет опубликовано несколько решений, в противном случае публикуется одно решение (авторское).

В настоящем номере журнала читателям предлагается подборка из 6 задач (это обычное число задач, которое будет публиковаться из номера в номер). Задачи выбраны из архива задач немецкого журнала «Die Wurzel» («Корень»). Этот журнал впервые увидел свет в 1967 г. и в 2006 г. отмечал свое 40-летие. Он был основан группой энтузиастов, студентов и преподавателей университета города Йена и является научно-популярным изданием, рассчитанным в первую очередь на школьников и студентов, интересующихся математикой, а также на учителей.

Ждем ваших решений и задач. Успехов вам!

Задачи

1. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB = a$, сторона $BC = b$. Точка E – середина стороны CD. Диагональ BD и отрезок AE пересекаются в точке F. Найдите отношение площади треугольника DEF к площади прямоугольника $ABCD$.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2xy + 3yz = 100, \\ 4yz - 5xz = 42, \\ 6xz - 7xy = 28. \end{cases}$$

3. Пусть a, b и c целые числа и $a^2 + 2bc = 0$. Покажите, что выражение

$$(b^2 + 2ac)^3 + (c^2 + 2ab)^3$$

есть квадрат некоторого целого числа.

4. На окружности ω произвольным образом расположены три точки A, B и C. Обозначим через h_a и h_b длины перпендикуляров, опущенных из точки C на касательные к этой окружности, проходящие соответственно через точки A и B. Через h обозначим длину перпендикуляра, проведенного из точки C на AB. Докажите, что $h^2 = h_a \cdot h_b$.

5. Решить уравнение $x\sqrt{1-x} + \sqrt{3+x} = 2\sqrt{1+x^2}$.

6. Дан прямоугольный треугольник ABC, гипотенуза которого $AB = c$, а катеты $BC = a$, $CA = b$. R и r – соответственно его радиусы описанной и вписанной окружностей. Найдите наибольшее значение отношения $\frac{r}{R}$.

Срок присылки решений – **до 1 июля 2009 г.**

◀ Вернуться к содержанию

Прелюбопытный равнобедренный треугольник

ФИЛИППОВСКИЙ Григорий Борисович
учитель математики Русановского лицея г. Киева
shvilka@mail.ru

Речь пойдет о равнобедренном треугольнике с углами 108°, 36°, 36°. С этим треугольником можно часто встретиться в различных задачах, его свойства интересны и важны (о них мы поговорим ниже). С помощью этого треугольника успешно выводятся некоторые тригонометрические соотношения. Он является составной частью правильного пятиугольника (рис. 1). Благодаря участию в вопросах золотого сечения порой его называют *золотым треугольником*. Поэтому представляется целесообразным внимательно рассмотреть его свойства. В некоторых из предложенных ниже задач треугольник с углами 108°, 36°, 36° будет фигурировать в условии – с тем, чтобы определить или доказать некоторые его свойства. В других задачах он будет «обнаруживаться» в ответе.

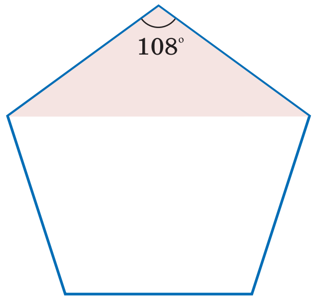


Рис. 1.

Задача 1. Дан угол 108°. Проведя не более двух линий, постройте угол, равный одной трети данного угла.

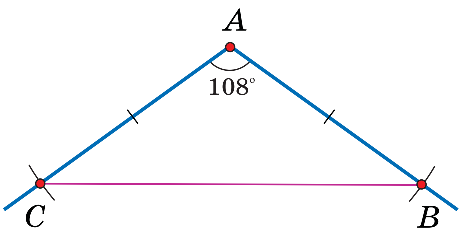


Рис. 2.

Решение. Пусть угол A равен 108° (рис. 2). Первая линия – окружность с центром A произвольного радиуса. Она пересекает стороны угла в точках B и C. Вторая линия – отрезок BC. Очевидно, $\angle B = \angle C = 36^\circ$, а угол 36° составляет одну треть угла 108°.

Задача 2. Пользуясь только циркулем, определите, равен ли тупой угол равнобедренного треугольника ABC 108°.

Решение. Строим окружность ω с центром в точке A радиуса $AB = AC$ (рис. 3). Поскольку $108^\circ \cdot 10 = 1080^\circ = 360^\circ \cdot 3$, то выполняем следующее: начиная от точки C раствором циркуля, равным $BC = a$ делаем ровно 10 засечек. Если в результате проделаем 3 оборота и вновь попадем в точку C, то да, угол A равен 108°. В противном случае угол A не равен 108°.

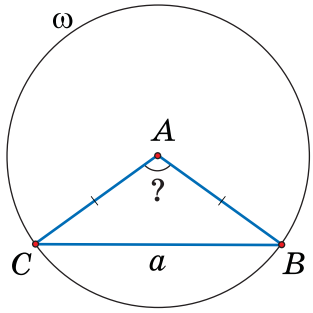


Рис. 3.

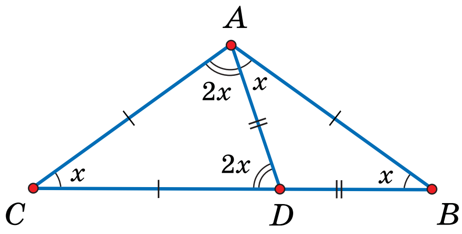


Рис. 4.

Задача 3. В треугольнике ABC на стороне BC нашлась точка D такая, что $AD = BD$ и $AC = CD = AB$. Найдите углы треугольника ABC.

Решение. Пусть $\angle ABD = x$ (рис. 4). Тогда и $\angle BAD = x$ ($AD = BD$). Но и $\angle ACB = x$ ($AB = AC$). Далее, $\angle ADC = 2x$ (внешний для ΔABD). Значит, и $\angle CAD = 2x$ ($AC = CD$).

Для ΔABC имеем: $x + x + 3x = 180°$, откуда $x = 36°$, $\angle A = 3x = 108°$.

Задача 4. Покажите, что конструкция рис. 4 связана с золотым сечением, то есть делением отрезка в крайнем и среднем отношении, когда длина всего отрезка относится к его большей части так же, как длина большей части – к меньшей.

Решение. Покажем, что, согласно рис. 4, выполняется равенство $\frac{BC}{CD} = \frac{CD}{BD}$.

Треугольники ABD и BCA подобны (по двум углам). Тогда $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}$. Поскольку по условию $AB = CD$, то получаем требуемое.

Задача 5. На стороне BC треугольника ABC найдены точки N и T такие, что все шесть получившихся треугольников являются равнобедренными (рис. 5). Найдите углы треугольника ABC.

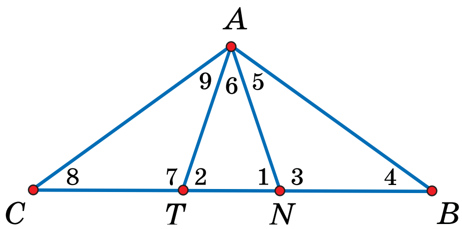


Рис. 5.

Решение. Углы 1 и 2 не могут одновременно быть тупыми как углы треугольника ANT. Пусть угол 1 – острый; тогда угол 3 – тупой, и в треугольнике ANB возможно лишь $AN = NB$. Пусть $\angle 4 = \angle 5 = x$; тогда $\angle 1 = 2x$ как внешний для треугольника ANB. Если угол 2 – тупой, то $AT = TB$ и $\angle 4 = \angle 5 + \angle 6$. Однако это невозможно, поскольку $\angle 4 = \angle 5 = x$. Следовательно, угол 2 – острый, а смежный с ним угол 7 – тупой. Значит, $AT = TC$ и $\angle 8 = \angle 9 = y$. Но ведь и треугольник ABC равнобедренный. Из сказанного следует, что $\angle 4 = \angle 5 = \angle 8 = \angle 9$ или $x = y$. Поскольку треугольник CAN равнобедренный, то $\angle 1 = \angle 9 + \angle 6 = 2x$. С учетом того, что $\angle 9 = x$, получаем $\angle 6 = x$ и $\angle BAC = 3x$.

Для треугольника ABC имеем: $x + x + 3x = 180°$, откуда $x = 36°$. Таким образом, треугольник ABC имеет углы 108°, 36°, 36°.

Задача 6. Центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC симметричны друг другу относительно стороны BC. Найдите углы этого треугольника.

Решение. Поскольку точка I (инцентр, центр вписанной окружности) лежит на серединном перпендикуляре к стороне BC, а точка O (центр описанной окружности) симметрична ей относительно стороны BC, то треугольник ABC является равнобедренным (рис. 6). Поскольку угол BAC является вписанным, то дуга BC, не содержащая вершину A, равна $2\angle A$. Тогда $\cup BAC = 360^\circ - 2\angle A$ и соответствующий ей центральный $\angle BOC = 360^\circ - 2\angle A$.

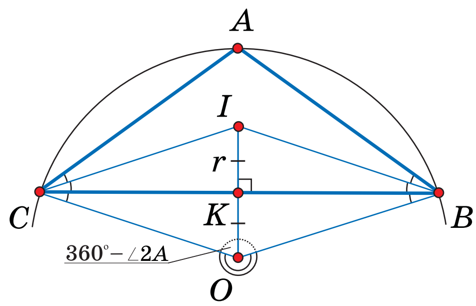


Рис. 6.

В то же время $\angle BIC = 90^\circ + \dfrac{\angle A}{2}$ (известный факт геометрии треугольника). Но $\angle BIC = \angle BOC$ – из соображений симметрии. Значит, $90^\circ + \dfrac{\angle A}{2} = 360^\circ - 2\angle A$, откуда $\angle A = 108^\circ$, $\angle B = \angle C = 36^\circ$.

Задача 7. С помощью рис. 6 вычислите sin18°.

Решение. Из треугольника IKC $\sin 18^\circ = \dfrac{r}{R}$, где r и R – соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Имеем: $OI = 2IK = 2r$. Но, согласно формуле Эйлера, $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Тогда $R^2 - 2Rr = 4r^2$ или $4\left(\dfrac{r}{R}\right)^2 + 2\dfrac{r}{R} - 1 = 0$, $4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0$, откуда $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ (второй корень отрицательный, не подходит).

Задача 8. В равнобедренном треугольнике ABC биссектриса угла при вершине вдвое меньше биссектрисы угла при основании. Найдите углы треугольника.

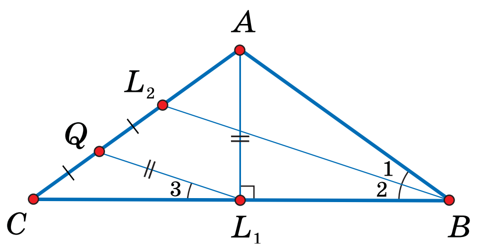


Рис. 7.

Решение. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) известно, что $AL_1 = \dfrac{1}{2}BL_2$ (рис. 7). Биссектриса угла при вершине является также высотой и медианой: $AL_1 \perp BC$ и $BL_1 = L_1C$. Проведем $L_1Q \parallel BL_2$. Тогда по теореме Фалеса $CQ = QL_2$ и L_1Q – средняя линия в треугольнике BCL_2: $L_1Q = \dfrac{1}{2}BL_2 = AL_1$.

Пусть на рис. 7 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \alpha$; тогда $\angle C = 2\alpha$, $\angle AQL_1 = 3\alpha$ (внешний для треугольника CQL_1). В то же время $\angle CAL_1 = 90^\circ - 2\alpha$ (из прямоугольного треугольника AL_1C). При этом $AL_1 = L_1Q = \dfrac{1}{2}BL_2$. Следовательно, $\angle AQL_1 = \angle QAL_1$ или $3\alpha = 90^\circ - 2\alpha$, откуда $\alpha = 18^\circ$. Тогда $\angle A = 108^\circ$, $\angle B = \angle C = 36^\circ$.

Задача 9. В тупоугольном треугольнике ABC ортоцентр H является центром окружности, описанной около треугольника BOC (O – центр описанной окружности треугольника ABC). Найдите углы треугольника ABC.

Решение. Угол BOC равен $360^\circ - 2\angle A$, как мы уже отмечали в задаче 6. Но угол BOC – вписанный в окружность ω (рис. 8). Значит, дуга BC, не содержащая точку O, равна $720^\circ - 4\angle A$. Тогда

$$\cup BOC = 360^\circ - (720^\circ - 4\angle A) = 4\angle A - 360^\circ.$$

Следовательно, центральный для окружности ω угол BHC равен $4\angle A - 360^\circ$. С другой стороны, из четырехугольника AH_2HH_3 находим, что $\angle BHC = 180^\circ - \angle A$. Имеем:

$$180^\circ - \angle A = 4\angle A - 360^\circ,$$

откуда $\angle A = 108^\circ$. Тогда $\angle B = \angle C = 36^\circ$ (треугольник ABC – равнобедренный, так как ортоцентр H лежит на серединном перпендикуляре к BC).

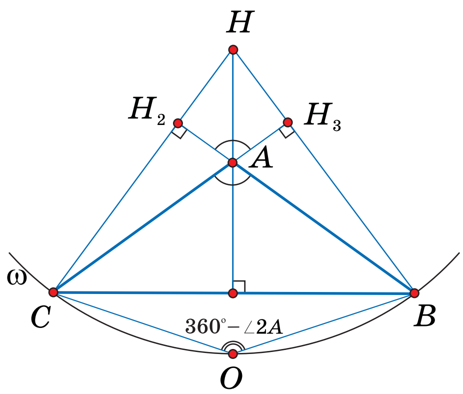


Рис. 8.

Задача 10. В треугольнике ABC с углами $\angle A = 108^\circ$, $\angle B = \angle C = 36^\circ$ проведена биссектриса CL_3. Точка D на стороне BC такова, что $AD = DC$ (рис. 9). Длина отрезка AD равна n. Найдите длину отрезка DL_3.

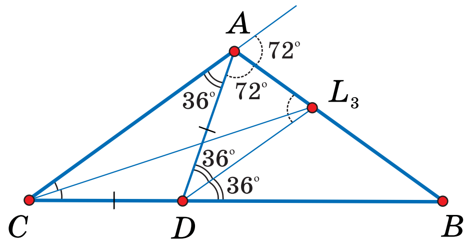


Рис. 9.

Решение. Поскольку по условию $AD = DC$, то $\angle DAC = \angle DCA = 36^\circ$. Подсчетом углов убеждаемся, что AB – биссектриса угла, смежного с углом DAC. Тогда L_3 – точка пересечения одной внутренней и одной внешней биссектрис для треугольника ADC. Поскольку две внешние и одна внутренняя биссектрисы в любом треугольнике пересекаются в одной точке, то DL_3 – вторая внешняя биссектриса, то есть DL_3 – биссектриса угла ADB. Но $\angle ADB = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$ (как внешний для треугольника ADC). Тогда $\angle ADL_3 = \angle L_3DB = 36^\circ$. А $\angle AL_3D = 180^\circ - (72^\circ + 36^\circ) = 72^\circ$, и $DL_3 = AD = n$.

Задача 11. С помощью треугольника ABC, в котором $\angle A = 108^\circ$, $\angle B = \angle C = 36^\circ$ вычислите $\cos 36^\circ$.

Решение. Проведем AL_1 – биссектрису, высоту и медиану треугольника ABC. Обозначим $\angle B = \angle C = \alpha$, тогда $\angle A = 3\alpha$ (рис. 10). Пусть также $BC = a$, $AB = AC = b$. По теореме синусов:

$$\frac{a}{\sin 3\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha} \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}.$$

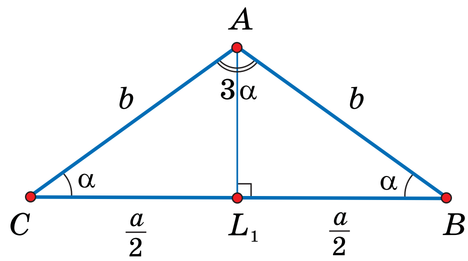


Рис. 10.

Из треугольника AL_1C: $\frac{a}{2b} = \cos\alpha$. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{3}{2} - 2\sin^2\alpha = \frac{3}{2} - 2(1 - \cos^2\alpha).$$

Отсюда $4\cos^2\alpha - 2\cos\alpha - 1 = 0$ и $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (второй корень отрицательный, не подходит).

Итак, $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Известно, что в равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) высота $AH = R - r$, где R и r – соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC. Найдите углы этого треугольника.

2. Существует ли тупоугольный равнобедренный треугольник, который можно разрезать на два различных равнобедренных треугольника, один из которых подобен данному?

3. В окружность вписаны два равнобедренных треугольника: один с боковой стороной b и основанием a, другой – с боковой стороной a и основанием b. Найдите углы этих треугольников.

4. С помощью золотого треугольника найдите косинусы углов 18°, 54°, 72°.

Вернуться к содержанию

Размышления

Математика и интеллектуальное развитие школьников[1]

ДОРОФЕЕВ Георгий Владимирович (1938–2008)
зав. лабораторией математики Института содержания и методов обучения Российской академии образования в 1995–2008 гг.

Интеллект человека развивается в процессе его взросления, и обучение в школе – существенная, но лишь ограниченная часть мира, окружающего ребенка, в котором огромную роль играют также семья, «улица», средства массовой информации, и, прежде всего, телевидение – благодаря наличию визуальной составляющей, более доступной для человека и поэтому более эффективной, чем составляющая вербальная. Недаром на телевидении почти дурным тоном считается жанр «говорящая голова», хотя к этому жанру относились, например, известные передачи с Юрием Лотманом и ряд других передач, постепенно исчезающих из эфира или сдвигающихся в телевизионной сетке на время «после полуночи» – лучшее время для нуждающихся в интеллектуальной «пище» и предпочитающих связные тексты «клиповому» монтажу аудио- и видеоряда.

Телепередачи и в особенности игры с «простыми людьми» представляют собой богатый материал для исследования реальных результатов всей системы общего образования, и в частности школьного математического образования. Нельзя не заметить, что вопросы, связанные с математикой, встречаются в этих играх крайне редко, что это уже само по себе в определенном смысле значимо с точки зрения роли даже самых примитивных конкретных математических знаний в жизни «простого человека», не говоря уж о влиянии математического образования на развитие мышления.

Например, на вопрос, чему равно произведение $183 \cdot 0$, один широко известный артист ничтоже сумняшеся ответил: 183, хотя в начальной школе «прочно» знал,

[1] Текст с небольшими изменениями перепечатан из журнала «Мир образования – образование в мире» (№ 1, 2008).

что оно равно 0. И это совершенно естественно: в «реальной жизни» никто ничего и никогда не умножает на 0, и поэтому равенство $a \cdot 0 = 0$ выветрилось из его памяти – я думаю, сразу же после окончания школы, если не раньше.

В то же время можно в принципе реконструировать вполне разумную «гуманитарную» логику данного ответа: нуль – это «ничто», «пустое место», и, чтобы умножить 183 на 0, с ним не надо ничего делать, так что $183 \cdot 0 = 183$. Примерно так же аргументировали равенство $10^0 = 10$ в «пилотном миниэксперименте», проведенном автором с совершенно случайно возникшей небольшой группой ученых-гуманитариев уровня доктора наук. Правда, один из них утверждал, что $10^0 = 0$ – «ничего не делать – ничего и не получится, то есть получится “ничто”».

Другими словами, группа ученых-нематематиков и артист рассуждают практически одинаково, несмотря на то, что сферы их деятельности кардинально различаются и имеют разве лишь одно общее – они не связаны с математикой. А ведь уже в 5-м классе все прекрасно знали, что $10^0 = 1$.

Ясно, что эта «гуманитарная» логика «испытуемых» не имеет отношения к логике математики и, что более существенно, к логике вообще, к ее «главному правилу»: чтобы ответить на вопрос, надо, прежде всего, его понять. В первом примере нормальная логика обязывает задать вопрос: а что значит вообще умножить число на 0?

Здесь можно вспомнить (из начальной школы), что произведение – это сумма одинаковых слагаемых, и тут же удивиться: $183 \cdot 0$ – это сумма, состоящая из нуля (!) слагаемых, равных 183! А выйти из затруднения можно, *вспомнив*, что произведение чисел не зависит от порядка сомножителей, т.е. $183 \cdot 0 = 0 \cdot 183$, а последнее произведение есть уже нормальная сумма из 183 нулей, то есть равна 0, так как сумма любого числа нулей равна 0 – это следует даже из «гуманитарного» представления о нуле: если к «ничему» добавить «ничто», то и получится «ничто».

А еще проще *вспомнить* специальное определение, которое дается в курсе математики: для любого числа a произведение $a \cdot 0 = 0$. Другими словами, для ответа на поставленный вопрос *достаточно* иметь математическую память, которая имеет скорее всего весьма специфический, формальный характер: трудно представить себе плохую обычную память у артиста, сыгравшего в театре десятки ролей, или у доктора наук. Надо сказать, впрочем, что речь идет и об умении *вспоминать,* и о направленности, готовности сознания на «включение» этого умения в проблемной ситуации.

И еще один пример – из другой телевизионной игры. Был задан необычно трудный для такого рода игр вопрос из области математики: чему равен tg 45°, на который было предложено на выбор 4 ответа: $\frac{1}{2}$, 1, 2 и 4. Ведущий игры создал интересное обсуждение этого вопроса, и после «помощи зала», 63% которого решили, что $tg 45^\circ = \frac{1}{2}$, участница согласилась с этим ответом. И с точки зрения результатов школьного математического образования, достижения его благородных целей самое интересное, пожалуй, состоит в том, что эта участница только что получила высшее юридическое образование, а школу закончила... с золотой медалью.

При этом она и не пыталась вспомнить, *что такое* тангенс и *что такое* угол 45°, но, видимо, помнила, что «где-то там», в этой жуткой тригонометрии, $\frac{1}{2}$ была — $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, но уровень ее интеллектуальной деятельности в ответе на данный вопрос был близок к 0, и то только потому, что не может быть отрицательным. Кроме того, ведущий игры, явно высокоразвитый интеллектуально, «обучая» играющую, как можно было дать правильный ответ, давал такой сложный способ рассуждений, что девушка вряд ли могла его понять — для этого она должна была знать, что такое синус и косинус, знать, чему равны синус и косинус угла 45°, и уметь разделить одно из этих чисел на другое.

Понятно, что молодой ведущий учился по нынешним учебникам математики, где тангенс любого действительного числа (угла) x действительно определяется как отношение синуса к косинусу и «забывается» предыдущее, геометрическое, примитивное определение тангенса угла в прямоугольном треугольнике как отношения одного из его катетов к другому. И это, конечно, не его вина, что авторы учебников, сопоставляя эти два определения, не подчеркивают, что новое определение «согласовано» со старым: не противоречит ему, а переносит его на более общие объекты.

Мне, однако, ни разу не довелось слышать, чтобы какой-либо ученик обратил внимание на эту логическую «тонкость», хотя в результате изучения математики ученик должен понимать, что двух определений одного и того же объекта «не бывает», хотя контаминация логики и терминологии не является редкостью в рабочем языке математики. Скажем, так называемое «второе определение группы» в университетском курсе алгебры и теории чисел является в действительности даже и не определением, а теоремой.

Не удержусь еще от одного, чисто личного примера: один ученый лингвист высокой квалификации «помог» свой дочери получить двойку за домашнее задание, научив ее алгебраическому преобразованию по «формуле» $\frac{a}{b+c}=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$, будучи абсолютно уверенным, что это равенство верно — по аналогии с равенством $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$. И этот случай был еще в далекие 60-е гг., когда времени на обучение математике отводилось существенно больше. Другими словами, все течет, но далеко не все изменяется.

Приведенные примеры, на наш взгляд, достаточно убедительно показывают, что нынешняя методическая система обучения математике в школе из двух целей, «сверхзадач» обучения математике: научить *думать* и научить *вычислять* — в качестве приоритетной однозначно рассматривает вторую, и если «походя», совершенно стихийно, в отношении некоторых учащихся добивается реализации и первой цели, то это происходит скорее вопреки, чем благодаря этой системе. Разумеется, этот вывод имеет чисто субъективный характер и, безусловно, является импрессионистическим, однако проводить, скажем, специальное «широкомасштабное» исследование на эту тему означало бы пустую трату сил и средств — интеллектуальных и финансовых: результат его очевиден заранее.

В то же время нынешняя методическая система обучения математике, со своей фактически единственной целью научить вычислять, конечно же, вряд ли вредит интеллектуальному развитию учащихся: например, она, безусловно, развивает память, но результаты обучения, как показывают приведенные примеры, являются ничтожными, и вне профессий, связанных с математикой, математические знания — выше простой арифметики натуральных чисел и десятичных дробей (в том числе, конечно, процентов) — оказываются абсолютным балластом, сопоставимым с авторским знанием исторического факта, что король Франции Пипин Короткий принадлежал династии Меровингов — если я не ошибаюсь за давностью лет.

Очевидно, что развитию памяти способствует и изучение других школьных предметов — так же, как и процесс жизни вообще, однако «математическая память», связанная с абстрактными объектами, весьма специфична, и потому изучение математики даже с этой целью нельзя заменить, скажем, разучиванием стихов, но результаты достижения развития памяти как одной из целей изучения математики, как мы видим, ничтожны. Иначе не могли возникнуть приведенные выше примеры, не существовало бы в телевизионной рекламе такого «шедевра», как «параллельные прямые не пересекаются — доказано "Занусси"», и не повторялось бы «математически образованными» журналистами, что геометрия Лобачевского тем и отличается от «обычной», школьной геометрии Евклида, что в ней параллельные прямые пересекаются.

И память, и логику, и язык учащихся формируют, разумеется, и другие школьные предметы, но это не является их главной задачей, хотя весомый «вклад» в формирование языка и логики авторы учебников «по мере сил» вносят, а практика обучения убедительно показывает логическую и языковую «глухоту» учащихся, фактически формируемую у учащихся и этими учебниками, и — впрочем, естественно, гораздо реже — учебниками математики.

В известнейшем учебнике физики для 7-го класса можно прочитать, например, что если два тела одинаковой массы находятся на двух чашках весов, то весы находятся в равновесии, и этим пользуются для нахождении неизвестной массы. Между тем в действительности при этом используется не это утверждение, а ему обратное: если весы в равновесии, то массы двух тел, находящихся на разных чашках, равны. И это спокойно читает или слушает семиклассник, который на «параллельном» уроке геометрии заработал бы вполне справедливую двойку за то, что он перепутал признак равнобедренного треугольника с его свойством.

А в не менее распространенном в школе учебнике русского языка сначала определяются качественные прилагательные, остальные прилагательные называются относительными, а затем появляются прилагательные притяжательные, которым логически в рассматриваемой классификации уже нет места. Этот учебник используется, кстати, и в одной серии учебников, девизом которой является именно интеллектуальное развитие учащихся, однако мне не известно ни одного случая «удивления» учащегося по этой серии учебников подобной логикой.

Вообще, изучение языков — и русского, и иностранных — может оказать неоценимую помощь в изучении математики, поскольку именно в процессе изучения языков может формироваться вербально-логический компонент интеллекта, столь важный для усвоения математики. Известно, например, что учащиеся зачастую не могут доказать теорему или решить задачу, потому что они просто не понимают ее условия, записанного на обычном русском языке с помощью сложного предложения с одним или двумя придаточными, но более успешно справляются с ней при более «понятной» синтаксической формулировке.

Впрочем, эта возможность в отношении языков в действительности остается, как и при обучении математики, лишь потенциальной: центральным при изучении русского языка является формирование правильного написания слов и употребления знаков препинания («жи», «ши» пиши через «и», а перед «который» ставь запятую), а главной целью изучения иностранных языков является формирование коммуникативных умений.

Между тем для формирования вербально-логического компонента интеллекта главную роль играет семантика языка, смысл предложений (и, разумеется, слов), который определяется их грамматической структурой и лексическим наполнением. Так, в понимании точного смысла предложений, в частности предложений математического языка, огромное значение имеют такие понятия лингвистики, как *тема* и *рема* и *логическое ударение.*

При всей сложности этих понятий в лингвистике школьный математический язык достаточно прост, чтобы их смысл в математическом контексте воспринимался практически однозначно. Более того, их применение в математике может оказаться эффективным инструментом для решения одной из весьма болезненных проблем обучения математике, связанной с различением прямого и обратного утверждения.

И достоин только сожаления тот факт, что на одном из августовских совещаний буквально «освистали» учительницу, взявшую на себя смелость произнести слова *тема* и *рема.* Нельзя не вспомнить здесь максиму маркиза де Ларошфуко: «Les personnes médiocres condamnent tout ce qui dépassent leur portée»[1]; те учителя-математики, которые достаточно тонко чувствуют язык, не могут обидеться на приведенное утверждение, где они якобы названы посредственностями. «Обидным» является в действительности именно обратное ему утверждение, которое получится, например, если в исходное утверждение вставить слово seulement — «только».

Приведем еще один «лингвистический» пример — из математики. Миллионы учеников — так же как и тысячи учителей — в течение многих лет читали фразу в учебнике: «Корнем уравнения $x^2 = 1$ является $x = 1$» и считали, вслед за авторами учебника, что в ней сформулировано истинное утверждение, поскольку это «то же самое» утверждение, что и «$x = 1$ является корнем уравнения $x^2 = 1$». Между тем это утверждение просто не должно быть понятным читателю — его грамматика подразумевает, что уравнение $x^2 = 1$ имеет единственный корень, что неверно, и оно становится истинным и, заметим, более понятным, если сказать: «Одним из корней...» Не говорим же мы, например: «Мой брат — химик», если имеем несколько братьев — мы скажем, к примеру: «Мой старший брат — химик», «Один из моих братьев — химик» или «У меня есть брат-химик».

Разумеется, для понимания смысла предложения всегда важное значение имеет общий контекст, но уж авторы учебников к языку должны быть максимально

---

[1] Посредственность обыкновенно осуждает все, что выше ее понимания (*франц.*). — *Прим. ред.*

внимательны, и в особенности это касается учебников математики, где смысл в принципе не должен зависеть от контекста, что, впрочем, не всегда разумно в коммуникативном плане – фигуры контекстуального умолчания или подразумевания неизбежны при конструировании учебного текста. И недаром несколько опрошенных мною высококвалифицированных преподавателей английского языка начали свой перевод рассматриваемого предложения с артикля *the* – знака единственности следующего далее объекта. При этом один из опрошенных вместо английского *root* – «корень уравнения» – написал *essence* – «сущность», «существо», «корень» в гуманитарном, «философском» смысле (например, корень зла), что явно доказывает его удаленность от английского математического языка.

И в заключение приведем последний пример, который показывает важность совместных усилий по формированию вербально-логического компонента интеллекта с помощью обучения языкам и математике. Этот пример также заимствован из телевидения.

В одной из давних передач типа «Суд идет» адвокат истца в своем выступлении ярко и довольно убедительно доказывал, что из некоторого утверждения A следует утверждение B (на математическом языке, точнее, в логико-математической символике доказывал утверждение $A \Rightarrow B$) – содержание этих утверждений для нас совершенно не существенно, поскольку речь идет только о логике дальнейших рассуждений. В ответной речи адвокат ответчика сказал сразу же, что утверждение $A \Rightarrow B$ означает в точности то же самое, что $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$, где черта означает отрицание соответствующего утверждения (которое в средствах массовой информации почти всегда называют обратным утверждением – «в полном несоответствии» с этим термином в математике). В логико-математической символике $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \Rightarrow \overline{B})$, *то есть эти утверждения, как говорят в математике, равносильны.*

Между тем утверждение $A \Rightarrow B$ было очевидно неверным, абсурдным, и всем присутствующим, в том числе и самому адвокату истца, и судье, и народным заседателям, стало понятно, что истец не прав, в результате чего ответчик мгновенно выиграл процесс. В действительности же адвокат ответчика допустил – сознательно или бессознательно – грубую логическую ошибку: утверждения $A \Rightarrow B$ и $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ вовсе не равносильны, они обратны друг другу, и ложность одного из них не исключает истинности другого – знание этого входит в minimum minimorum и логики, и математики, и языка. Трудно заподозрить, что большая группа образованных и квалифицированных в своем деле специалистов позволила бы адвокату ответчика утверждать, например, что утверждение «Кошка – животное четвероногое» означает в точности то же самое, что «Животное, не являющееся кошкой, не четвероногое». Другими словами, принимать правильные решения, не совершать ошибок человеку позволяют конкретные знания, даже при слабой логической подготовке, но в сфере знаний, удаленной от него, его логика уже «не срабатывает», что может, как показано в рассмотренном примере, привести к определенно негативным последствиям.

Весьма любопытно при всем этом, что адвоката ответчика вряд ли можно упрекнуть в логической неграмотности – он и в настоящее время широко «светится» на телеэкране, и подобного логического «бреда» автор никогда больше от него не слышал, а в нынешней судебной иерархии он занимает очень важные и ответственные посты. Мне кажется, что он, прекрасно зная логику, просто воспользовался всеобщей логической малограмотностью и, хотя и несколько цинично, продемонстрировал результаты нынешней системы среднего школьного образования в плане функциональной грамотности, являющейся залогом «полноценного функционирования человека в обществе».

Таким образом, **обучение и математике, и предметам языкового цикла в настоящее время не способствует повышению уровня интеллектуального развития школьников,** во всяком случае развитию его вербально-логического компонента, хотя в потенциальном плане могло бы решать эту важнейшую с социальной точки зрения задачу образования.

Однако для этого необходимо радикальное изменение методических систем обучения соответствующим предметам. В этой связи нельзя не отметить, что попытка автора лишь предложить некоторые изменения в этом направлении, сделанная в процессе разработки нынешних стандартов математического образования, оказалась полностью безуспешной и он создал себе сомнительную репутацию «разрушителя устоев».

Важно отметить, что речь идет только о значимости изучения «математики для всех», точнее, «для тех, кому она не нужна», а на самом деле исключительно нужна — и полезна, и необходима. Но необходима именно ее *общеобразовательная* функция — обучение и развитие с помощью математики, а не ее *профессионализирующая* функция — для будущих математиков и всех тех, кому математика нужна в профессиональной деятельности. Проводящееся в настоящее время профилирование старшей школы является одним из путей осуществления приоритета этой функции в соответствующих профилях обучения и способно сохранить и повысить традиционно высокий уровень отечественного школьного математического образования.

В качестве оптимистического финала упомяну один учебник истории для 7-го класса, где варяжская версия истории Руси изложена таким образом, что в тексте можно легко выделить и аксиомы, и теоремы, и гипотезы, которые автором обсуждаются, хотя ни одного такого слова в учебнике нет. Насколько мне известно, автор учебника весьма далек от математики, и этот пример для меня является подтверждением того, что гуманитарии вполне могут обладать так называемым математическим мышлением, а по существу, нормальным логическим мышлением, свойственным образованному человеку, и не всегда — человеку с аттестатом о среднем или с дипломом о высшем образовании.

Вернуться к содержанию

Математики-педагоги

Леонид Моисеевич Лихтарников[1]

ГОРИН Евгений Алексеевич
профессор кафедры математического анализа
Московского педагогического
государственного университета
evgeny.gorin@mtu-net.ru

СИМОНОВ Александр Сергеевич
профессор кафедры математического анализа
Тульского государственного педагогического
университета им. Л.Н. Толстого

СЕМЕНОВ Павел Владимирович
зав. кафедрой математического анализа
и методики его преподавания
Московского педагогического университета
pavels@orc.ru

Школы бывают разными. Есть общеобразовательная, основная, начальная, профильная и т.д. школы. Но есть и школы для уже вполне сложившихся математиков: профессоров, доцентов, аспирантов и т.п. Чаще всего, это Зимние или Летние математические школы, «индексируемые», как правило, традиционным местом их проведения. Между этими типами школ, разумеется, есть масса различий. Однако есть и весьма существенное общее обстоятельство. А именно, в школах учатся и общаются.

Каждый, кто хотя бы раз имел отношение к конкретной школе, достаточно ясно может оценить объем и сложность организационных, методических, финансовых, научных и многих других вопросов, без разрешения которых невозможна адекватная работа школы. От директора учебной (государственной или негосударственной) школы, в конечном счете, зависит очень многое. От организаторов школы для ученых успешность ее работы, определенно, находится в еще большей зависимости.

---

[1] Текст с небольшими изменениями перепечатан из сборника «Архимед» (Вып. 5. М., 2009).

Тут требуется и активность, и смелость, и точное знание и понимание цели, и умение преодолевать многочисленные бюрократические препоны, и неподдельный интерес и внимательность к людям, и многое-многое другое. Короче, здесь нужны подвижники. Таких людей немного. Наш рассказ сегодня посвящен одному из них.

* * *

29 декабря 2007 года в городе Рочестер (штат Миннесота, США) скончался Л.М. Лихтарников, известный математик, выдающийся организатор математического образования в нашей стране, замечательный педагог и воспитатель научных и педагогических кадров.

Леонид Моисеевич родился в селе Суво Бурятской АССР 18 июня 1924 года. В 1941 г. он поступил на физико-математический факультет Иркутского университета, но уже в феврале 1942 г. прервал обучение и до марта 1944 г. участвовал в боях Великой Отечественной войны. Был ранен, награжден орденом Красной Звезды и медалями.

Л.М. Лихтарников

После демобилизации из армии он продолжил обучение в Иркутском университете, который и окончил в 1950 г. В следующем году Леонид Моисеевич поступил в аспирантуру к профессору В.В. Васильеву. В 1954 г. Л.М. Лихтарников защитил кандидатскую диссертацию на тему «Линейные интегральные уравнения с двумя параметрами». К этой области относится основная часть его научных интересов, но только ими она не исчерпывается. Его интересовали проблемы сходимости приближенных методов решения операторных уравнений, качественный анализ решений, аналог принципа максимума для операторных уравнений и многое другое.

Начиная с 1959 и по 1971 г. Л.М. Лихтарников был доцентом Хабаровского педагогического института, долгое время заведовал созданной им кафедрой математического анализа и состоял в должности проректора по научной работе. Люди старшего поколения прекрасно понимают, какими деловыми качествами надо было обладать, чтобы успешно совмещать все эти виды деятельности.

Именно в этот период особенно ярко проявился его талант организатора. Тогда (как и сейчас) очень остро стоял вопрос о подготовке математических кадров высокой квалификации для работы в вузах Дальнего Востока, и Л.М. Лихтарникову удалось в удивительно короткий срок коренным образом изменить ситуацию.

Конечно, Леонид Моисеевич действовал не в одиночку. Существенную помощь ему оказал Селим Григорьевич Крейн, в то время профессор Воронежского университета. С.Г. Крейн был не только одним из выдающихся советских математиков, но и выдающимся организатором. По его инициативе с 1967 г. в Воронеже начали проходить знаменитые Воронежские зимние математические школы (ЗМШ). Цель этих школ (которые продолжают проходить по сей день) состояла в том, чтобы ликвидировать пробелы в тех направлениях новой математики, в которых у нас образовалось заметное, иногда очень существенное, отставание от лучших образцов.

Неслучайно эти школы начали работать вскоре после Московского конгресса математиков. В работе школ принимали участие не только маститые ученые, такие как Ю.М. Березанский, В.А. Ефремович, М.А. Красносельский (который до отъезда из Воронежа в Москву считался наряду с С.Г. Крейном одним из лидеров), Б.Я. Левин, А.Я. Повзнер, С.В. Фомин, Б.В. Шабат и многие другие, но и подрастающее поколение. В числе первых лекторов были В.И. Арнольд, А.А. Кириллов, С.П. Новиков. Однако главным было привлечение в качестве слушателей и активных участников семинаров научной молодежи, включая студентов, со всех концов страны (теперь надо было бы сказать СНГ, Грузии, Прибалтики и т.д.).

Недавно вышла книга воспоминаний С.Г. Крейна и о нем[1]. Среди помещенных там текстов имеется и статья Л.М. Лихтарникова. Он пишет, что в 1963 г. оказался участником советско-американского симпозиума по уравнениям в частных производных, который проходил в новосибирском Академгородке, и что там он познакомился с С.Г. Крейном, которому и предложил почитать лекции в Хабаровском пединституте. Конечно, Леонид Моисеевич вначале был смущен, но Селим Григорьевич умел сделать так, чтобы его не боялись, но слушались (о Воронежской ЗМШ он как-то сказал: «В школе нет выборов, нет премий, нет демократии, поэтому работа проходит в спокойной творческой обстановке»).

С.Г. Крейн впервые приехал в Хабаровск в 1964 г. с лекциями по функциональному анализу. Сотрудничество С.Г. Крейна и Л.М. Лихтарникова плодотворно развивалось не одно десятилетие, даже тогда, когда Леонида Моисеевича судьба перебросила из Хабаровска в Новгород Великий.

С.Г. Крейн

С.Г. Крейн посещал Дальний Восток еще несколько раз, и формы сотрудничества постоянно расширялись. Сначала это были научные консультации, затем приглашение в аспирантуру наиболее обещающих молодых преподавателей, причем не только из Хабаровска. Совместная деятельность С.Г. Крейна и Л.М. Лихтарникова, позволила организовать в 1966 г. межвузовскую физико-математическую конференцию Дальнего Востока, которая проходила в Хабаровске. В ней не только были широко представлены вузы Дальнего Востока, но и многие научные центры «всея Руси великой».

Осенью 1968 г. в Хабаровске проходил советско-японский симпозиум по теории вероятностей и математической статистике. В работе симпозиума приняло участие около 100 известных ученых из обеих стран. Л.М. Лихтарников провел большую работу по подготовке и проведению этого симпозиума.

Разумеется, наиболее активная часть дальневосточной научной молодежи стала участвовать и в работе Воронежских ЗМШ. Используя модель этих школ, Л.М. Лихтарников организовал проведение Дальневосточных математических школ, которыми руководил в 1967–1971 гг. Поездка на Дальний Восток, с различными ознакомительными мероприятиями была очень интересной. Тем более, что, кроме

[1] В электронном виде ее можно скачать здесь: http://mathedu.ru/memory/kreyn.djvu.

чтения лекций в Школе, каждому гостю можно (и нужно) было (по выбору) почитать двухнедельный курс на Камчатке, Сахалине, в Магадане и т.д. Это позволило Леониду Моисеевичу пригласить для чтения лекций и дальнейших деловых контактов многих известных математиков. Среди лекторов были В.И. Арнольд, М.Ш. Бирман, Ю.А. Брудный, Ю.Л. Далецкий, М.И. Кадец, Ю.И. Любич, Е.М. Семенов, С.В. Фомин, Б.В. Шабат и другие.

В результате деятельности Л.М. Лихтарникова и С.Г. Крейна для дальневосточных вузов через систему целевой аспирантуры была подготовлена большая группа специалистов по функциональному анализу, топологии, дифференциальным уравнениям и другим направлениям математики. В результате в общей сложности за десять лет только один Хабаровский пединститут направил в аспирантуру почти 150 человек, большинство из которых успешно защитили кандидатские диссертации, а четверо стали докторами физико-математических или педагогических наук (по методике преподавания математики) и профессорами.

Появление в Хабаровском пединституте активной (и «остепененной») научной молодежи приводила к смене приоритетов, и это, разумеется, нравилось далеко не всем, тем более, что молодежь не склонна к компромиссам. Леонид Моисеевич в упомянутой статье с горечью описывает, как его (а за одно и нескольких молодых доцентов) по существу вынудили покинуть Хабаровский пединститут. Стоит заметить, что бюрократия «на местах» традиционно для России оказалась сильнее своих далеких московских коллег, которые посочувствовали, но посоветовали не ввязываться в драку.

Интересно, что «вирус просвещения» оказался сильнее бюрократов, и Дальневосточные математические школы, инициированные усилиями С.Г. Крейна и Л.М. Лихтарникова, продолжили существование.

С 1971 по 1998 г. Л.М. Лихтарников работал в Новгородском пединституте, сначала доцентом кафедры, а затем — заведующим кафедрой математического анализа. В это время он увлекся математической логикой и несколько лет читал студентам одноименный курс. Результатом этой работы стал набор занимательных логических задач в журнале «Квант», цикл популярных изданий по числовым ребусам (предназначенных как для учеников младших классов, так и для старшеклассников и учителей), сборник задач типа «задачи о мудрецах».

Таким образом, обстоятельства не сломили Леонида Моисеевича, он по-прежнему оставался активным просветителем и замечательным педагогом. Его глубокие и строгие лекционные курсы как и раньше неизменно привлекали к нему талантливую молодежь, которая не только приобретала настоящую математическую культуру, но и приобщалась к тем высоким жизненным идеалам, которые исповедовал Учитель.

Не оставил Леонид Моисеевич и идею привлечения к научным исследованиям молодых (и не очень молодых) преподавателей. Он всегда понимал, что к успеху в приобщении к научной работе приводит не «дистанционное» обучение, а в основном устная традиция, т.е. прямой контакт (кстати, так же обстоит дело, например, в театральном искусстве). Поэтому он проявлял удивительную настойчивость и использовал весь свой опыт и обширные научные связи для проведения серьезных научных конференций теперь уже в западной части нашей страны.

Леонид Моисеевич всегда принимал самое активное участие в работе со школьниками. Еще в Хабаровске по его инициативе было создано несколько школ с углубленным изучением математики. Как председатель областного отделения Педагогического общества РСФСР, Л.М. Лихтарников много сделал для улучшения деятельности этого общества, для обобщения и распространения передового опыта в преподавании математики в школе.

В 1998 г. Л.М. Лихтарников и его жена Нонна Андреевна переехали к дочери в Рочестер (об этом городе с населением около 100 000 человек местные жители традиционно говорят: «Best Small City in America»). Леонид Моисеевич писал воспоминания и скучал по сыну Андрею, хорошему математику, который остался в Санкт-Петербурге. Последние годы жизни Л.М. Лихтарникова были омрачены тяжелым недугом.

Мягкий и добрый человек, он никогда не прощал интеллектуальной нечистоплотности.

Трудолюбие, разносторонность интересов, сердечность и отзывчивость навсегда останутся в памяти тех, кому посчастливилось общаться с этим замечательным смелым человеком, который, несомненно, состоялся в весьма непростое время, отведенное ему судьбой, и сделал так много для отечественного математического просвещения и науки.

Список некоторых публикаций Л.М. Лихтарникова

1. Введение в математический анализ: Учеб. пособие для студентов мат. отд-ний пед. ин-тов. Л., 1975 (соавтор А.И. Поволоцкий).

2. Логические задачи. Элементы математической логики: Учеб. пособие для студентов мат. отд-ний пед. ин-тов. Л.: ЛГПИ, 1976.

3. Педагогическое общество, педвуз и школа. Новгород: Б.и., 1982 (соавтор И.Д. Бутузов).

4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной и неопределенный интеграл: Учеб. пособие. Л.: ЛГПИ, 1983 (соавтор А.И. Поволоцкий).

5. Организация работы областного отделения Педагогического общества РСФСР: Метод. пособие для респ. (АССР) краев. и обл. отд-ний Пед. об-ва РСФСР. М.: Б.и., 1983 (соавтор Н.И. Медведева).

6. Определенный интеграл. Ряды: Учеб. пособие для студентов мат. отд-ний пед. ин-тов. Л.: ЛГПИ, 1984 (соавтор А.И. Поволоцкий).

7. Метрические пространства. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных: Учеб. пособие. Л.: ЛГПИ, 1985 (соавтор А.И. Поволоцкий).

8. Интегральное исчисление функций нескольких переменных и дифференциальные уравнения: Учеб. пособие. Л.: ЛГПИ, 1986 (соавтор А.И. Поволоцкий).

9. Элементы теории функций действительной переменной: Учеб. пособие Л.: ЛГПИ, 1987 (соавтор А.И. Поволоцкий).

10. Теория аналитических функций: Учеб. пособие. Л.: ЛГПИ, 1988 (соавтор А.И. Поволоцкий).

11. Введение в математический анализ: Учеб. пособие. Л.: ЛГПИ, 1989 (соавтор А.И. Поволоцкий).

12. Логические задачи: Кн. для учащихся 3–7-х кл. Новгород: Б. и., 1995.
13. Задачи мудрецов: Кн. для учащихся. М.: Просвещение, 1996.
14. Занимательные логические задачи: Для учащихся нач. шк. СПб.: Лань: МИК, 1996.
15. Числовые ребусы и способы их решения: Для учащихся нач. шк. СПб.: Лань: МИК, 1996.
16. Основы математического анализа (Кн. для учителей математики ст. кл. сред. шк.). СПб.: Лань, 1997 (соавтор А.И. Поволоцкий).
17. Первое знакомство с математической логикой: Кн. для начинающих изучать мат. логику и преподавателей. СПб.: Лань 1997.
18. Элементарное введение в функциональные уравнения: Кн. для начинающих изучать функцион. уравнения и для преподавателей. СПб.: Лань, 1997.
19. Математическая логика: Курс лекций: Задачник-практикум и решения: Учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по мат. спец. СПб.: Лань, 1998 (соавтор Т.Г. Сукачева; 3-е изд. СПб.: Лань, 2008).
См. также:
http://www.mathnet.ru/php/person.phtml?option_lang=rus&personid=23973

С.Г. Губа — ученый-методист[1]

ТЕСТОВ Владимир Афанасьевич
зав. кафедрой алгебры, геометрии и теории обучения математике
Вологодского государственного педагогического университета
vladafan@inbox.ru

Сергей Григорьевич Губа родился в рабочей семье 8 октября 1922 г. в Украине, в Черниговской области, там же окончил среднюю школу. В 1939 г. поступил в Киевский государственный университет на механико-математический факультет, где проучился два курса вплоть до начала Великой Отечественной войны. В 1941 г. попал в окружение и до конца войны находился в немецком лагере для военнопленных. В 1946 г. вслед за родителями переехал в Вологодскую область и поступил на 3-й курс физико-математического факультета Вологодского пединститута. После окончания института в 1948 г. был направлен на работу в среднюю школу г. Сокола Вологодской обл., где работал учителем математики, а затем и завучем в течение 14 лет. В 1962 г. перешел на работу в Вологодский УКП Ленинградской лесотехнической академии в качестве ассистента кафедры высшей математики. С 1966 г. стал работать старшим преподавателем в Вологодском филиале Северо-западного политехнического института.

[1] Текст с небольшими изменениями перепечатан из сборника «Архимед» (Вып. 5. М., 2009).

Работая в высшей школе, С.Г. Губа никогда не прерывал связей со средней школой, проводил факультативы для школьников и руководил школьными математическими кружками. Имея хорошую математическую подготовку и большой педагогический опыт, С.Г. Губа успешно занимался научно-методической работой, участвовал в конкурсе по решению задач, проводимом журналом «Математика в школе», помещал собственные задачи на страницах этого журнала. Особый интерес он проявил к задачам на доказательство и их роли в обучении математике. Им был составлен сборник задач на доказательство, опубликован по этой тематике целый ряд статей в журнале «Математика в школе».

Его научными консультантами стали ярославские ученые проф. З.А. Скопец и доц. В.А. Жаров. Кандидатская диссертация С.Г. Губы «Варьирование задач на доказательство как средство активизации математической деятельности учащихся и развития у них интереса к предмету», успешно защищенная им в 1973 г. в Ярославле, до сих пор привлекает внимание исследователей.

В 1974 г. С.Г. Губа перешел работать в Вологодский государственный педагогический институт на должность доцента кафедры математики. Он разработал и неоднократно читал курсы теории вероятностей и методики обучения математике, добиваясь прочного и глубокого усвоения студентами учебного материала. Это были курсы, ориентированные на будущую профессиональную деятельность учителя математики, что лежит в русле современных требований к высшему образованию.

Большим авторитетом С.Г. Губа пользовался и среди учителей математики, для которых прочитал большое количество лекций на курсах повышения квалификации. Эта его деятельность проходила в трудный для школы период перехода на новые программы и учебники по математике. С.Г. Губа потратил много сил и времени для разъяснения учителям новых идей в математическом образовании.

С 1980 г. С.Г. Губа возглавил кафедру математического анализа и методики обучения математике. На этой должности он отдавал все свои силы совершенствованию подготовки учителей математики. Скончался С.Г. Губа 15 сентября 1988 г. Двое его детей окончили МГУ им. М.В. Ломоносова, сын – В.С. Губа – стал известным российским алгебраистом, доктором физ.-мат. наук.

Список некоторых публикаций С.Г. Губы

Книги

1. Факультативные курсы по математике. Вологда, 1976 (соавторы Э.Л. Каминская, Т.Э. Каминский).

2. Математические олимпиады в сельской школе. Вологда, 1979.

3. Практикум по теории вероятностей: Метод. указания и материалы в помощь студентам и учителям школ. Вологда, 1980.

4. Математические олимпиады в IV–X классах: Метод. разраб. для учителей матем. Волог. обл. Вологда, 1981.

5. Математические викторины и конкурсы: Метод. рекомендации по внекл. работе для стажеров и учителей школ. Вологда, 1983.

6. Математика в ШБУ: Метод. разработка для учителей. Вологда, 1985.

7. Школьные математические олимпиады: Метод. разраб. для учителей. Вологда, 1988.

Статьи в журнале «Математика в школе»

8. Использование *p*-ичной системы счисления для решения некоторых комбинаторных задач. – 1966. № 5. С. 68.

9. Решение геометрических задач на доказательство с помощью прямоугольной системы координат. – 1970. № 5. С. 48–51.

10. О первых доказательствах [задачи на доказательство для I–V кл.]. – 1971. № 5. С. 39–41.

11. Развитие у учащихся интереса к поиску и исследованию математических закономерностей [с помощью варьирования одной задачи]. – 1972. № 3. С. 19–22.

12. Рецензия на книгу «*Бартенев Ф.А.* Нестандартные задачи по алгебре: Пособие для учителей» (М.: Просвещение, 1976). – 1978. № 1. С. 90–91.

13. Рецензия на книгу «*Игнатьев Е.И.* В царстве смекалки» (М.: Просвещение, 1978). – 1979. № 2. С. 72–73.

14. О некоторых формах приобщения учащихся старших классов к педагогической профессии. – 1980. № 5. С. 62–66. (соавтор Ю.В. Ломакин)

15. В помощь решающим задачи [свойства натуральных чисел, являющихся полными квадратами]. – 1980. № 6. С. 57.

16. В помощь решающим задачи [решение уравнений в натуральных числах]. – 1981. № 5. С. 57.

17. Рецензия на книгу «*Труднев В.П.* Считай, смекай, отгадывай» (М.: Просвещение, 1980). – 1982. № 1. С. 69–70.

18. Разностный метод суммирования. – 1982. № 2. С. 76.

19. Рецензия на книгу «*Кордемский Б.А.* Увлечь школьников математикой». (М.: Просвещение, 1981). – 1982. № 6. С. 70–71.

20. Простые и составные числа [4 утверждения + 15 задач]. – 1983. № 2. С. 60.

21. Произведение двух последовательных натуральных чисел [5 утверждений + 14 задач]. – 1983. № 4. С. 51–52.

22. О некоторых причинах перегрузки учащихся при обучении математике. – 1985. № 6. С. 32–36.

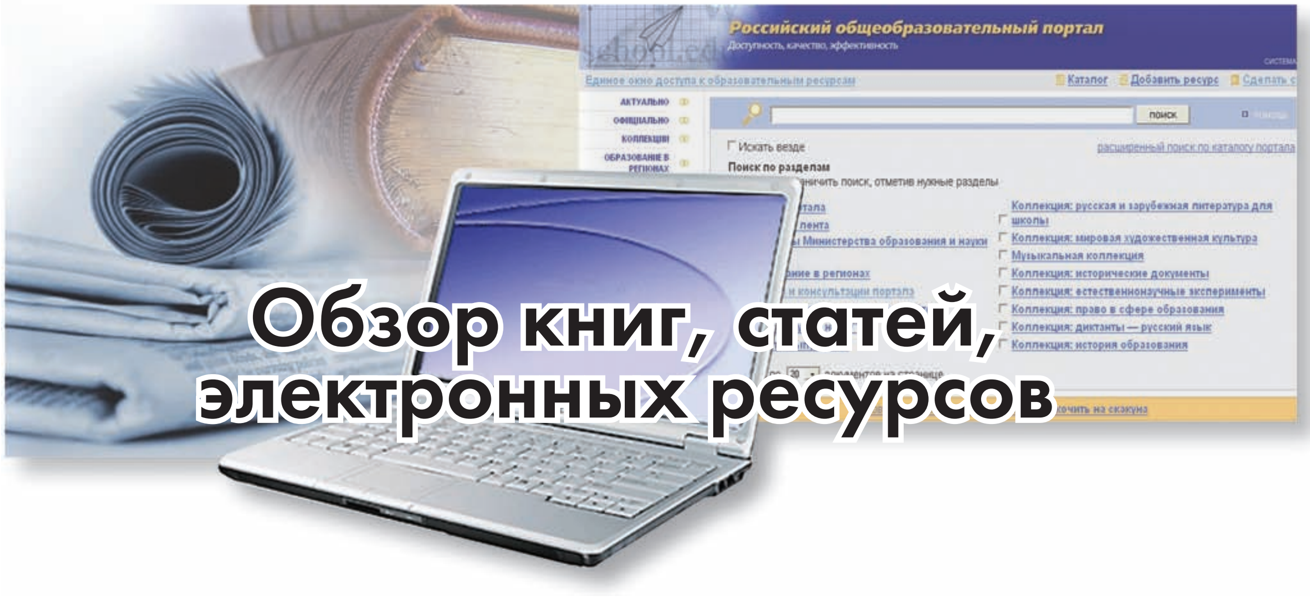
23. Рецензия на книгу «*Гусев В.А., Орлов А.И., Розенталь А.Л.* Внеклассная работа по математике в 6–8 классах» (М.: Просвещение, 1984). – 1986. № 6. С. 71–72.

24. Рецензия на книгу «*Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В., Потапов М.К.* Старинные занимательные задачи» (М.: Наука, 1985). – 1986. № 6. С. 71–72.

25. Стандартные задачи с нестандартным решением [о пользе решения стандартных задач нестандартными методами при повторении]. – 1987. № 2. С. 18–20.

26. Рецензия на книгу «*Кордемский Б.А., Ахадов А.А.* Удивительный мир чисел» (М.: Просвещение, 1986). – 1987. № 5. С. 78.

Вернуться к содержанию



Обзор книг, статей, электронных ресурсов

Портал современных педагогических ресурсов

ЛОДАТКО Евгений Александрович
основатель Портала современных педагогических ресурсов, г. Славянск
portal_manager@i.ua

Целью Портала http://www.intellect-invest.org.ua/ является предоставление доступа всем заинтересованным лицам к современным образовательным (педагогическим) е-ресурсам, концентрация новых педагогических источников в собственном образовательном депозитарии, содействие реализации интеллектуальных образовательных инвестиций в национальном социокультурном пространстве, которые осуществляются научно педагогическими учреждениями и благотворительными фондами.

Каждый из посетителей Портала может рассчитывать на информационную поддержку, которая заключается в предоставлении актуальной информации об образовательных мероприятиях и педагогических событиях в Украине, России и странах ближнего зарубежья, на имеющиеся педагогические е-ресурсы (библиотеки, тематические собрания книг, энциклопедии, справочники, журналы, подборки статей и т.п.).

Раздел Портала отведен под электронные периодические издания, в которых могут публиковаться статьи, содержащие результаты исследований соискателей кандидатских и докторских степеней.

Среди изданий, размещенных в настоящее время на Портале:

• новый электронный научно-педагогический журнал «Педагогическая наука: история, теория, практика, тенденции развития» (уже вышли три номера);

• архив (с 1999 года) ВАКовского сборника научных трудов «Гуманизация учебно-воспитательного процесса» (Славянский государственный педагогический университет);

• Вестник Научной школы педагогов «АКМЕ» (г. Ульяновск).

Свою страницу на Портале имеет Научная школа педагогов «Акме» (руководитель М.И. Лукьянова, доктор педагогических наук, профессор, действительный член РАЕ). О школе, ее структуре, направлениях работы и других вопросах можно узнать, зайдя по адресу http://www.intellect-invest.org.ua/rus/school_akme/.

«Библиотека научно-педагогической литературы» Портала предоставляет посетителям уникальную возможность знакомиться со старыми, малоизвестными или издававшимися малыми тиражами педагогическими изданиями. Среди них русско- и украиноязычные «Дореволюционные издания», «Издания 1917–1940 гг.», «Издания 1941–1991 гг.» и «Издания с 1992 г.».

Особое место на Портале занимает постоянно обновляющийся раздел «Образование в контексте истории общества: опыт дискурсивной интерпретации», в котором для свободного доступа (и без каких-либо комментариев) выложены официальные документы и авторские материалы, характеризующие и освещающие те трансформационные и социокультурные процессы, которые происходили в системе отечественного образования с дореволюционного времени и до наших дней.

С целью содействия установлению научных контактов между специалистами, которые состоялись как ученые или только работают над обретением своего ученого статуса или получают высшее образование, обмену информацией между научными работниками и молодыми учеными, магистрантами, студентами, другими корреспондентами на Портале выделен специальный раздел «Научные контакты и знакомства».

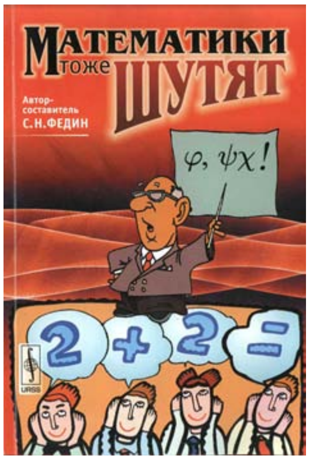
В этом разделе каждый желающий может разместить информацию со своими анкетными данными (научного руководителя, потенциального и реального соискателя научной степени, – докторанта, аспиранта, магистранта, – специалиста, работающего над отдельными научными проблемами, преподавателя и студента вуза). Кроме того, в этой рубрике может размещаться информация научных организаций и учреждений, учебных заведений, заинтересованных в установлении научных контактов со сторонними специалистами и учащейся молодежью.

Также на Портале в отдельном разделе «Педагогические персоналии» представлена продолжающаяся подборка биографических эссе об известных в мире педагогики личностях или официальных лицах, деятельность которых повлияла на развитие отечественного образования и педагогической науки.

Вернуться к содержанию

БУСЕВ Василий Михайлович
сотрудник Научной педагогической библиотеки им. К.Д. Ушинского,
редактор издательства «Просвещение»
vbusev@yandex.ru

В 2009 г. в издательстве УРСС вышла книга «Математики тоже шутят» (автор-составитель С.Н. Федин). В ней собраны многочисленные математические шутки: высказывания ученых, случаи на экзаменах, анекдоты, забавные формулы и теоремы и т.д. Некоторые истории уже давно стали фольклором, некоторые явно возникли недавно (а какие-то произошли с самим автором-составителем). В конце книги приведен список источников, из которых заимствовано большинство шуток.



В предисловии к книге автор-составитель предлагает всем заинтересованным лицам присылать замечания и дополнения на адрес slovomir@yandex.ru с пометкой «Математики тоже шутят».

Вряд ли можно добавить еще что-то по существу к уже сказанному о книге, кроме самих шуток. Ими мы и закончим эту мини-заметку, надеясь, что книга будет расширяться, дополняться и переиздаваться.

Не спорь с лектором

На одном курсе со мной учился призер международной математической олимпиады Л., человек, весьма одаренный в математике, но очень экстравагантный и не склонный к регулярным занятиям. Будучи уверен в своей подготовке, он игнорировал лекции по мат. анализу, которые в его потоке читал довольно суровый профессор Камынин. Подготовившись по какой-то книжке, Л. беспечно явился на экзамен. Взяв билет, он, недолго думая, пошел отвечать. Через две минуты ревнивый лектор прервал его:

— Я вижу, вы готовились не по моим лекциям.

— А что вас, собственно, интересует, — мгновенно парировал Л., — знание мат. анализа или знание ваших лекций?

— Знание моих лекций, — не моргнув глазом, отрубил Камынин.

— А где здесь сдают мат. анализ? — нагло спросил Л.

— Вон там, — профессор невозмутимо указал рукой на угол аудитории, где принимал экзамен доцент Х., славящийся своей «жестокостью».

Взяв билет, Л. направился к нему. Через десять минут он уже выходил из аудитории с «тройкой».

Таблица умножения

Известный немецкий алгебраист Эрнст Эдуард Куммер (1810–1893), очень плохо умел считать в уме. Если при чтении лекции ему надо было выполнить простенький расчет, он обычно прибегал к помощи студентов.

Однажды ему надо было умножить 7 на 9. Он начал вслух рассуждать:

— Гм... это не может быть 61, потому что 61 — простое число. Это не может быть и 65, потому что 65 делится на 5. 67 — тоже простое число, а 69 — явно слишком много. Остается только 63...

Главное достижение

Говорят, что академик Колмогоров (1903–1987) очень гордился выведенной им формулой, описывающей женскую логику:

«Если из А следует В, и В приятно, то А — истинно».

Площадь Ленина

Прохожий обращается к математику:

— Скажите, пожалуйста, как найти площадь Ленина?

— Надо ширину Ленина умножить на его длину.

Прыжки в воду

Философу, физику и математику требуется решить такую задачу: прыгнуть с вышки в бассейн диаметром метр.

Ну, философ сосредоточился, вспомнил Сократа и Гегеля и, понадеявшись на удачу, прыгнул. И... не попал.

Физик измерил скорость и направление ветра, высоту вышки, все рассчитал, прыгнул и... попал.

Математик построил модель, написал программу, получил траекторию полета, долго что-то вычислял, потом разбежался, прыгнул и... улетел вверх. В знаке ошибся.

Антисоветская теорема

Теорема. Роль партии — отрицательна.

Доказательство. Хорошо известно, что:

1. Роль партии непрерывно возрастает.
2. При коммунизме, в бесклассовом обществе, роль партии будет нулевой.

Таким образом, имеем непрерывно возрастающую функцию, стремящуюся к 0. Следовательно, она отрицательна. Теорема доказана.

Пи... или не Пи...?

С 1960 до 1970 года основной нацональный напиток, называвшийся «Московская особая водка» стоил: поллитра 2,87, а четвертинка 1,49. Эти цифры знало, наверное, почти всё взрослое население СССР. Советские математики заметили, что если цену поллитровки возвести в степень, равную цене четвертинки, то получится число «Пи»:

$$2{,}87^{1{,}49} \approx \pi.$$

Надежный способ

Где-то в Грузии идет поезд. В купе сидят математик и местный житель. За окном проплывает большое стадо овец.

— В этом стаде 7238 овец, — машинально говорит математик.

— Вах! — поражается грузин, — Откуда ты это знаешь, генацвали? Это мое стадо и в нем действительно 7238 овец. Как ты смог так быстро их посчитать?!

— Очень просто, — отвечает математик. — Я сосчитал количество ног и поделил на 4.

Вспомнил

В чем-то сходная история, но уже в другом вузе. Преподаватель на экзамене, показывая на некий параметр в выкладках студента, спрашивает его:

— Как называется эта величина?

— Эта величина, — бойко начинает студент, — выражается вот по такой формуле через...

— Постойте, — перебивает преподаватель, — я вас не спрашиваю, как получить эту величину. Я спрашиваю, как она называется.

— Н-ну... — неуверенно говорит студент. — ...Сигма.

— Нет, нет, не надо как она обозначается. Как она называется?

Студент растерянно молчит.

— Ну, как ее у вас на лекциях называли? — пытается помочь преподаватель.

Лицо студента озаряется счастливой улыбкой:

— А-а! Вспомнил! Она называется ХРЕНОВИНА! Наш лектор так и говорил: «Берем эту хреновину...»

Знаменитую трагикомическую песню «Раскинулось поле по модулю пять», поющуюся на мотив народной песни «Раскинулось море широко», написал в 1946 году студент матмеха Ленинградского университета (ныне СПбГУ) Виктор Скитович. Почти сразу она пошла в народ, став невероятно популярной в ε-окрестности ЛГУ. Впоследствии у нее, как и у всякой другой фольклорной (ну, почти фольклорной) жемчужины появилось множество вариантов, различающихся порой лишь отдельными словами. Некоторые из этих отличий я отразил в сносках, избрав в качестве канонического варианта наиболее удачную, на мой взгляд, версию этой песни.

Раскинулось поле по модулю пять

Раскинулось поле по модулю пять,
Вдали интегралы[93] вставали,
Студент не сумел производную взять,
Ему в деканате сказали:[94]

«Экзамен нельзя на халяву сдавать[95],
Тобой Фихтенгольц[96] недоволен[97],
Изволь теорему Ферма[98] доказать
Иль будешь с матмеха уволен».

Почти доказал, но сознанья уж нет[99],
В глазах у него помутилось,

[93] *Вар.:* полиномы
[94] *Вар.:* Ему очень строго сказали
[95] *Вар.:* Анализ нельзя на арапа сдавать,
[96] *Вар.:* Натансон (*Натансон Г. И. — профессор матмеха СПбГУ*)
[97] *Вар.:* Гаврин тобой недоволен (*Гаврин М. К. — профессор матмеха ЛГУ*)
[98] *Вар.:* Коши
[99] *Вар.:* И рад доказать, да сознанья уж нет,

Увидел стипендии меркнущий свет[100],
Упал, сердце в ноль обратилось[101].

Напрасно билет предлагали другой —
К нему не вернулось сознанье[102],
Боревич сказал, покачав головой:
«Напрасны все наши старанья»[103].

Три дня[104] в деканате покойник лежал,
В штаны Пифагора одетый[105],
В руках квадратичную форму держал[106]
И эллипс[107], на вектор надетый[108].

К ногам привязали тройной[109] интеграл
И в матрицу труп завернули[110],
И вместо молитвы какой-то нахал
Прочёл теорему Бернулли[111].

Декан[112] своё веское слово сказал:
«Материя не исчезает.
Загнётся студент — на могиле его
Такой же лопух вырастает».

[100] *Вар.:* И, бросивши на пол коварный билет,
[101] *Вар.:* Упал, сердце больше не билось.
[102] *Вар.:* Старались привесть его в чувство.
[103] *Вар.:* «Вот кара ему за беспутство!» (*или:* «Бессильно тут наше искусство».)
[104] *Вар.:* Всю ночь
[105] *Вар.:* Кривою Пеано одетый
[106] *Вар.:* В руках он раскрытый матрикул держал
[107] *Вар.:* И синус
[108] *Вар.:* И базис, на корень надетый
[109] *Вар.:* двойной. (*Кроме того, после этой строки иногда следует еще один куплет:* Наутро, лишь только раздался звонок, /Друзья с ним проститься решили. /Из векторов крест, из астроид венок /На тело его возложили.)
[110] *Вар.:* Гиперболой труп обернули
[111] *Вар.:* Надгробную речь замдекана сказал, /И слезы у многих блеснули.
[112] *Вар.:* *(актуальный в советское время):* Марксизм

Напрасно старушка[113] ждёт сына домой[114],
Ей скажут — она зарыдает,
А синуса график, волна за волной,
По[115] оси абсцисс убегает...[116]
А синуса график, волна за волной,
Студентов с матмеха смывает...[117]

[113] *Вар.:* мамаша
[114] *Вар.:* Напрасно студентка ждет мужа домой
[115] *Вар.:* Вдоль
[116] *Вар.:* пробегает
[117] В некоторых вариантах отсутствуют две последние строчки.

Вернуться к содержанию

Олимпиада по методике математики в Тольятти

КУПРИКОВА Ольга Николаевна
доцент кафедры методики обучения
математике, физике и информатике
Смоленского государственного университета
onkuprikova@mail.ru

2–5 февраля 2009 г. в Тольяттинском государственном университете (ТГУ) проходил второй тур Всероссийской студенческой олимпиады по математике и методике ее преподавания. Идея создания олимпиады принадлежит доктору педагогических наук, профессору, заведующей кафедрой алгебры и геометрии ТГУ *Утеевой Розе Азербаевне*.

На олимпиаде были представлены команды из 14 городов от А до Я – от Архангельска до Ярославля. Каждая команда состояла из трех студентов 3–5-х курсов, команду сопровождал руководитель.

Соревнования проходили в течение двух дней. За это время студенты должны были принять участие в нескольких конкурсах. Олимпиада включала:

1) письменный индивидуальный тур по математике (алгебра, геометрия, математический анализ);

2) устный командный тур «История научных математических идей и открытий»;

3) индивидуальное тестирование по теории и методике обучения математике (вопросы общей и частной методики, в том числе вопросы по истории методики преподавания математики в средней школе);

4) устный командный тур «Методики и технологии обучения математике».

В жюри конкурса вошли представители разных городов: И.В. Антонова (Тольятти), Н.Г. Воробьева (Орехово-Зуево), Н.А. Дроздов (Тольятти), М.М. Дружинина (Тольятти), И.В. Егорченко (Саранск), Т.А. Иванова (Нижний Новгород), В.П. Кузьмин (Тольятти), М.А. Родионов (Пенза).

Команда г. Смоленска

Первый день был самым трудным и напряженным. Сразу после торжественного открытия олимпиады, на котором в адрес участников прозвучали напутственные слова от декана факультета математики и информатики *П.Ф. Зиброва*, членов жюри и организационного комитета, ребята отправились на письменный тур по математике – первое индивидуальное состязание.

Задания не были чересчур сложными и замысловатыми, однако требовали систематизированных и прочных знаний по алгебре, геометрии и математическому анализу в рамках курсов педагогического вуза. Приведу некоторые задания, разработанные доцентом кафедры алгебры и геометрии ТГУ *Н.А. Дроздовым* и старшим преподавателем той же кафедры *В.П. Кузьминым*.

1. Найти условие, которому должна удовлетворять матрица с целыми коэффициентами, для того чтобы все элементы обратной матрицы были целыми.

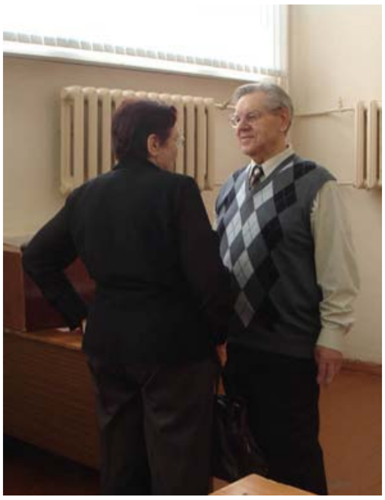
2. Многочлен с неотрицательными коэффициентами $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a^{n-1}x + 4$ имеет n вещественных корней. Доказать, что $P(1) > 2^{n+1}$.

3. Внутри эллипса взята произвольная точка O. Доказать, что на этой кривой существуют три попарно различные точки A, B и C такие, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\,2}$ сходится. Доказать, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$. Верно ли обратное?

Пока студенты трудились над решением задач, для руководителей команд была проведена экскурсия по музею Тольяттинского государственного университета, рассказана история университета, представлены основные научные достижения преподавателей вуза.

Помимо экскурсии для руководителей команд был организован интересный научно-методический семинар «Проблемы геометрического образования в современной средней и высшей школе», который провел известный автор учебников геометрии *Е.В. Потоскуев*. Особенно запомнились процитированные Евгением Викторовичем слова И.Ф. Шарыгина, о том, что окружность – это душа геометрии, а треугольник – клетка геометрии, он также необъятен как Вселенная. Я уже не однократно использовала эти сравнения на своих занятиях.



Е.В. Потоскуев и Т.А. Иванова

Средний балл по первому индивидуальному конкурсу был невысоким. Это огорчило и самих студентов, и их руководителей. Однако долго переживать не пришлось, поскольку вслед за письменным испытанием (сразу после обеда) участников ждал устный командный тур по истории научных идей и открытий.

Команда г. Рязани

Студентам раздавались задания, которые должны были выполняться в письменном виде за определенный промежуток времени, в среднем за 10–15 минут, потом листки с ответами собирались помощниками жюри и отдавались ему на суд. Пока ребята выполняли следующее задание, жюри проверяло предыдущее, и результаты в виде баллов практически сразу появлялись на разлинованной доске. Надо отметить, что все помощники были очень доброжелательно настроены к участникам команд, всегда могли подождать 1–2 минуты, пока соревнующиеся допишут последние пришедшие им в голову мысли.

А подумать было над чем. В первом задании студентам были предложены портреты ученых-математиков. Необходимо было узнать, кто изображен на портрете, кратко изложить биографические сведения об ученом и, конечно же, основные его идеи и открытия. Вот пример другого задания, которое называлось «Математические революции».

Согласны ли Вы с высказыванием известного французского математика Жозефа Батиста Фурье (1768–1830), который в своей «Аналитической теории тепла» писал, что математика «формируется медленно, но сохраняет каждый принцип, который она однажды приобрела»? Ему вторит наш современник – историк математики М. Кроу: «Революции никогда не встречаются в математике». Так были ли революции в истории математики? Если да, то какие? Ответ обоснуйте.

На второй день олимпиады участникам были предложены задания по методике преподавания в форме заданий с выбором ответа. Приведу примеры.

1. В начале XX века в методике преподавания математики был разработан метод целесообразных задач, автором которого являлся: а) Л.Ф. Магницкий; б) И.К. Андронов; в) С.И. Шохор-Троцкий; г) Дж. Пойа.

2. Принцип доступности в обучении математике означает: а) учет возрастных особенностей учащихся; б) учет индивидуальных особенностей учащихся; в) учет сложности изучаемого материала; г) осознание учащимися процесса учения.

3. Содержание понятий раскрывается через: а) классификацию понятия; б) определение понятия; в) приведение примеров; г) наглядное изображение понятий.

4. Уровневая дифференциация обучения математике – это: а) обучение учащихся одного и того же класса на разных уровнях; б) разделение учащихся на типологические группы; в) использование нескольких вариантов заданий на уроке; г) разный подход к оцениванию уровню знаний и умений учащихся.

5. В учебниках какого современного автора отражена точка зрения на математику как науку о моделях окружающего мира: а) Г.В. Дорофеева; б) А.Г. Мордковича; в) А.Н. Колмогорова; г) Л.С. Атанасяна?

6. Какой метод доказательства использован при доказательстве теоремы об измерении вписанного в окружность угла, рассматривающий доказательство для трех случаев, когда: 1) центр окружности лежит на одной из сторон угла; 2) центр окружности лежит внутри угла; 3) центр окружности лежит вне вписанного угла: а) полная индукция; б) неполная индукция; в) дедукция; г) аналогия?

После выполнения всего массива заданий (50), студенты перешли к командному соревнованию по современным технологиям обучения математике. Многие задания этого конкурса были творческими и поэтому требовали немало времени на выполнение. Большинство из них было направлено на проверку практических умений по реализации технологий обучения математике (в том числе, по технологиям М.Б. Воловича, Т.А. Ивановой, П.М. Эрдниева).

В одном из заданий требовалось рассказать в письменной форме о своем наставнике, учителе-методисте. Для ребят ведь очень значим личный пример их преподавателя, его успехи и достижения. Все команды справились с этим заданием на высшие баллы.

Подведение итогов и награждение победителей состоялось на третий день. Во всех конкурсах было несколько первых, вторых и третьих мест. Заметным лидером во всех номинациях была команда города Саранска. На высоком уровне выступили команды Пензы, Ярославля, Вологды, Нижнего Новгорода, Москвы. Хорошую методическую подготовку показали команды из Смоленска и Орехово-Зуева. Ребята были награждены грамотами, сувенирами с символикой города Тольятти и призами, которые всегда пригодятся учителю, – сборниками научных трудов, методическими разработками по математике.

В этот же день была проведена экскурсия по городу Тольятти в комфортабельном автобусе в сопровождении опытного экскурсовода. Город порадовал своих гостей в первую очередь чистотой, большим количеством красивых новостроек, спортивных комплексов и стадионов, широкими проезжими частями, и, как следствие этого, отсутствием на дорогах пробок. Территориальная разобщенность районов города и отсутствие исторического центра удивила жителей «старых» городов, имеющих круглую форму и «центр»: Смоленска, Москвы, Вологды, Ярославля. Зато так называемая римская проектировка города в виде расходящихся лучей позволяла легко ориентироваться в нем с первого дня приезда.

И, конечно же, была экскурсия на автомобильный завод. Только внешние размеры этого предприятия впечатляют: административные здания, цеха по сборке, испытательные полигоны – все это протянулось на несколько километров. Завод имеет свой музей и музей развития техники.

Скажу еще о проживании участников олимпиады. Оно было организовано на самом высоком уровне. Большая часть студентов жила за городом в оздоровительном комплексе «Русский бор». У них была возможность не только подготовиться к предстоящим состязаниям, но и подышать свежим воздухом, полюбоваться тольяттинскими соснами и живописными склонами жигулевских гор.

Хочется от лица участников и руководителей команд выразить благодарность всем организаторам и в особенности Розе Азербаевне, пожелать новых творческих успехов в деле организации конкурсов и пообещать самое активное в них участие.

Вернуться к содержанию

О работе семинара учебно-исследовательских работ школьников по математике

НЕТРУСОВА Наталья Михайловна
учитель математики школы-интерната
«Интеллектуал» г. Москвы
natnetint@gmail.com

СГИБНЕВ Алексей Иванович
учитель математики школы-интерната
«Интеллектуал» г. Москвы
sgibnev@mccme.ru

На четвертом, пятом и шестом заседаниях семинара ***Г.Б. Шабат*** сделал доклады на тему **«Арифметика как источник исследовательских тем для школьников»**. Для удобства чтения эти доклады объединены.

Преимущество арифметики как источника тем состоит в том, что формулировки задач просты и понятны. А недостаток в том, что ученые давно ею занимаются и то, что «плохо лежит», давно подобрано. Нерешенными остались сверхтрудные задачи, которые давать детям рискованно.

Эксперименты с простыми числами

Обозначим $P = \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$ — множество простых чисел. Рассмотрим четыре темы, из которых в первых двух результаты доказаны, а во вторых двух — нет.

Тема 1: Распределение простых чисел

Введем функцию $Pi(x)$, равную количеству простых чисел, не превосходящих x.

Еще Евклид доказал, что функция $y = Pi(x)$ неограниченно возрастает (это первое известное доказательство от противного).

1. Какова скорость роста? Оказывается, $\frac{Pi(x)}{x} \to 0$ — рост функции медленный. Можно получить этот результат экспериментально, строя таблицы простых чисел и подсчитывая их количество.

2. Как сделать конструктивным доказательство Евклида, т.е. научиться по нескольким данным первым простым числам строить (какое-то) следующее? С этим справился третьеклассник на кружке экспериментальной математики у Г.Б.

3. Можно рассматривать величину $\frac{Pi(x)}{x}$ как вероятность того, что взятое наугад натуральное число, не превосходящее x, окажется простым, и работать в терминах вероятностей.

Г.Б. Шабат

Гаусс экспериментально обнаружил, а Адамар и Валле-Пуссен доказали, что $Pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$. Чебышев доказал оценку $a\dfrac{x}{\ln x} < Pi(x) < A\dfrac{x}{\ln x}$, где a и A — некоторые константы.

1. Можно находить аналогичные константы по таблицам, сравнивать их с чебышевскими. (Пока это работа скорее наблюдателя, чем исследователя.)

2. Можно почитать работу Чебышева (она не очень трудная), попытаться доказать оценки с «упрощенными» a и A. (Элементарное доказательство неравенства Чебышева с $a = \dfrac{1}{3}$ и $A = 6$ можно прочесть в книге: *Шафаревич И.Р.* Избранные главы алгебры. М.: Математическое образование, 2000. Глава 5.)

Валле-Пуссен использовал в своем доказательстве хорошую тригонометрию, которую можно изложить школьнику. Он опирался на тот (доказанный им) факт, что нули дзета-функции не лежат на правой границе полосы $0 \le \operatorname{Re} s \le 1$. Если же верна гипотеза Римана, что все нетривиальные нули лежат на прямой $\operatorname{Re} s = \dfrac{1}{2}$, то оценки $Pi(x)$ получаются гораздо более точные (и соответствующие наблюдениям). Для тех, кто все это знает, тема о распределении простых числах становится очень привлекательной.

Тема 2: Простые числа в арифметических прогрессиях

Рассмотрим множество $P \cap (a + dN)$, где НОД$(a, d) = 1$. Дирихле доказал, что это множество бесконечно. (В частном случае, когда $d = 1$, получается утверждение Евклида о бесконечности множества простых чисел.)

1. Изучить свойства этих множеств. Можно брать, например, $d = 10, 100, \ldots$ и рассматривать, на какие цифры, пары цифр и т.д. кончаются простые числа.

Тема 3: Близнецы

Это пары простых чисел, отличающихся на 2, например, (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31) ... До сих пор неизвестно, конечно ли множество этих пар.

1. Составить программу для перечисления пар.
2. Исследовать распределение близнецов (оно загадочно).

Тема 4: Проблема Гольдбаха

$4 = 2 + 2,\ 6 = 3 + 3,\ 8 = 3 + 5,\ 10 = 3 + 7 = 5 + 5 \ldots$

«Всякое ли четное число представимо в виде суммы двух простых?» — нерешенная проблема.

Количество таких представлений поддается статистическому подсчету, желательно на компьютере, так как нужен перебор до десятков тысяч (руководитель может найти работу Литтлвуда 1920-х годов. См. также: *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.: МЦНМО, 2004. С. 45—57).

Обобщенные числа

Эта тема связана с мировоззренческими различиями классической и современной науки, которые отражены в таблице:

Классическая наука	Современная наука
— Как устроен мир? — $\boldsymbol{R}^3$	— Какие **возможны** миры? (Нет выделенного мира. Главное — логическая непротиворечивость.)
— Какими числами описывать мир? — $\boldsymbol{R}$ — Историческая традиция — подробно изучать $\boldsymbol{R}$; инженерная традиция — делать калькуляторы в $\boldsymbol{R}$, — предполагается неограниченность и бесконечная делимость (что отвергается современной физикой)	Какими бывают числа? Разными! Например: $\boldsymbol{R}$ $\boldsymbol{F}_p$ (поля вычетов) $\boldsymbol{Z}_d$, $\boldsymbol{Q}_p$ (d-адические и p-адические числа) $\boldsymbol{F}_q[t]$ (многочлены), $\boldsymbol{F}_q(t)$ (рациональные функции), $\boldsymbol{F}_q[[t]]$ (формальные степенные ряды), $\boldsymbol{F}_q((t))$ (ряды Лорана) над конечными полями (Отметим, что $\boldsymbol{F}_q[t]$, $\boldsymbol{F}_q[[t]]$ — кольца, $\boldsymbol{F}_q(t)$, $\boldsymbol{F}_q((t))$ — поля.)

Речь пойдет о некоторых числовых множествах из списка справа. В курсе математики ученики изучают разные темы (уравнения, графики и т.д.). Вопрос: а как эти темы выглядят для *других числовых множеств*? Некоторые вещи получатся неинтересными, некоторые слишком сложными, а некоторые — интересными и доступными.

Заметим, что при обычном сложении в $\boldsymbol{Z}$ мы сносим единицы старшего разряда **влево**, при сложении в $\boldsymbol{Z}_p$ — «**вправо**» (т.е. в том же направлении, в котором читаем число), а при сложении многочленов в $\boldsymbol{F}_p$ **ничего не сносим**.

Тема 1: Поля вычетов

Пусть $\boldsymbol{F}_5$ — поле вычетов из 5 элементов.

1. Как выглядят таблицы сложения и умножения в этом поле?

2. Какие еще пары таблиц могут быть таблицами сложения и умножения в этом поле?

3. Какими свойствами обладают эти числа?

4. Что изменится при замене 5, скажем, на 10? Оказывается, есть различия в полях простых и составных порядков — ученик может их открыть самостоятельно.

5. Графики. Координатная плоскость превращается в таблицу 5 × 5 клеток. Как выглядят графики линейных и квадратичных функций на такой плоскости?

6. Квадратные уравнения. (Интересно, что квадратных уравнений в поле $\boldsymbol{F}_5$ всего $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$; можно все их перебрать и расклассифицировать.) Когда уравнение разрешимо? — Когда дискриминант равен квадрату какого-то элемента поля (*является вычетом*): $D = x^2$.

Вопрос об условиях того, что элемент является вычетом, можно исследовать эмпирически, и прийти к **закону взаимности Гаусса**:

Пусть p и q – простые нечетные числа. Тогда

$$\neg\begin{cases}\sqrt{q}\in F_p\\ \sqrt{p}\in F_q\end{cases}\Leftrightarrow p,q\in 4n+3.$$

Тема 2: Десятиадические числа

В эту тему удобно вводить школьников с помощью такой задачи.

Скла́дные квадраты (автор задачи А.А. Кириллов)

$5\times 5=25$

$6\times 6=36$

$76\times 76=5776$

$376\times 376=141376$

Факт: Существует и единственно x, оканчивающееся на 6, бесконечное влево такое, что $x^2=x$.

Существует и единственно y, оканчивающееся на 5, бесконечное влево такое, что $y^2 = y$. Формально: $x\in Z_{10}=\{\ldots+x_2\cdot 10^2+x_1\cdot 10+x_0\,|\,x_i\in\{0,1,2,\ldots,9\}\}$ (кольцо 10-адических чисел).

Факт: x и y непериодичны (т.е. последовательности … x_2, x_1, x_0 и … y_2, y_1, y_0 непериодичны).

Это нетрудно доказать от противного. Пусть в x повторяется кусок X длиной N. Тогда

$$x=a+X(10^N+10^{2N}+\ldots)=a+\frac{X\cdot 10^N}{1-10^N}.$$

Но тогда $x\in Q$. Однако уравнение $x^2 = x$ в Q имеет только два решения $x = 0$; 1. Тем самым x не может быть рациональным числом, значит, у него нет периода.

Осмысленной является задача для школьника: написать программу, которая бы выдавала последовательно знаки чисел x и y.

Н.М. Нетрусова добавила, что некоторые обыкновенные дроби можно разложить в 10-адические числа (как в десятичные дроби). Например,

$$\frac{1}{3}=\ldots 667, \text{ потому что } \ldots 667\cdot 3=\ldots 001.$$

Литература: *Коблиц Н.* p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1982.

Тема 3: Арифметика многочленов на примере $F_5[t]$

Договоримся вместо многочленов записывать их коэффициенты, например вместо $2t^2 + 3t + 4$ писать 234. (Сложно приучить писать 0 вместо пропуска.) Тогда запись $234 + 12 = 241$ (по модулю 5) означает сложение двух многочленов.

Система удобна тем, что в старший разряд ничего не переходит, т.е. ничего не надо держать в уме!

Арифметику многочленов можно изучать по аналогии арифметикой целых чисел, например, по такому плану:

- Арифметические действия
- Алгоритм Евклида
- НОД, НОК, разложения на простые множители
- Уравнения (например, квадратные)

При таком параллельном изучении мысль раскрепощается: школьникам становится ясно, что важна не привязка к конкретным объектам, а наборы свойств. Например, что нам нужно от целых чисел для построения алгоритма Евклида? Деление с остатком. В $\boldsymbol{F}_p[t]$ оно также определено, а аналогом размера числа служит степень многочлена, т.е. длина «числа», составленного из коэффициентов.

Немного подробнее о квадратных уравнениях. Рассмотрим все квадратные трехчлены в $\boldsymbol{F}_5[t]$. Их всего 100. (Если первый коэффициент принять за 1, то трехчленов будет всего 25.) Можно сделать групповой проект с перебором всех значений этих многочленов и расклассифицировать их по количеству нулей.

Можно взглянуть на вопрос с другой стороны: какие из многочленов имеют нули? Те, что раскладываются на множители. Т.е. если «число» длиной 3 раскладывается в произведение двух разных «чисел» длиной 2, то соответствующий многочлен имеет 2 корня, а если «число» — квадрат, то 1 корень, если не раскладывается — нет корней.

Идея проекта по информатике: научить компьютер работать в этой арифметике.

На четвертом заседании семинара *13 января 2009 г.* были заслушаны доклады учеников.

1. Алексей Рухович «Степенны́е последовательности графов без кратных ребер» (*8-й класс, школа «Интеллектуал», научный руководитель А.Б. Скопенков*)

Степень вершины графа — это количество ребер, выходящих из этой вершины. Пусть задано натуральное число n и числа d_1, d_2, d_3, ..., d_n. При каких условиях найдется граф с n вершинами, степени которых d_1, d_2, d_3, ..., d_n?

Общая задача разбивается на четыре подзадачи: разрешены или запрещены петли, разрешены или запрещены кратные ребра. Кроме того, рассматривалось два типа графов: а) связный граф на плоскости, б) связный граф, клеточный на поверхности.

А. Рухович

Итого 8 подзадач. Для 6 из них Леша нашел и доказал критерии существования графа с заданными степенями вершин.

После вопросов выяснилось, что новыми являются условия существования графа без кратных ребер. А задача о графе без петель и кратных ребер пока открыта.

Условия таковы:

Для связного планарного графа (возможно, с петлями и кратными ребрами)

$$d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_n \text{ делится на } 2, \qquad (1)$$

$$2n - 2 \le d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_n. \qquad (2)$$

Для связного планарного графа без кратных ребер условия те же, но $n > 2$.

Для графа без петель к условиям (1) и (2) добавляется следующее:

$$2d_i \le d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_n \text{ для любого } i. \qquad (3)$$

Слушатели высказали следующие пожелания:

– в начале доклада определить все термины, которыми докладчик будет пользоваться;

– в начале же дать обзор результатов работы в компактной форме (это можно сделать с помощью презентации) и сразу сформулировать, какие результаты известны в литературе, а какие получены впервые в работе;

– учитывая ограниченное время на доклад, не рассказывать все доказательства, а выбрать одно, и на простом примере продемонстрировать идеи работы.

Был отмечен высокий уровень работы.

2. Денис Троян «Программа, генерирующая ритмы»

(*10-й класс, школа «Интеллектуал», научный руководитель А.Ю. Грамши*)

В докладе были изложены идеи алгебры ритмов, придуманной А.Ю. Грамши. Любой ритм можно представлять состоящим из последовательности ударов и пауз одинаковой длительности. Пример ритма: удар-пауза-пауза-удар. Очевидно, ритм можно закодировать последовательностью нулей и единиц, например, (1001). Иначе его можно записать как (3,1), объединяя удар и две паузы в одну длительность. Так вводится математическая запись ритмов. Затем вводятся операции над ритмами, вначале унарные (с одним ритмом): ракоход — исполнение исходного ритма в обратном порядке; дополнение ритма — преобразование долгих сигналов в короткие, а коротких — в длинные; сдвиг; смягчение и заострение ритмов. Интересно, что операции над ритмами образуют группу.

Д. Троян

Затем вводятся бинарные операции: сложение и умножение. Ритмы одной длины складываются почленно ($0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 1$). Ритмы разной длины пропорционально растягиваются до длины, равной наименьшему общему кратному, и также складываются почленно. Пример:

$(1,0,1) + (1,1,0,1) = (1,0,0,0,\ 0,0,0,0,\ 1,0,0,0) + (1,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0) = (1,0,0,1,0,0,0,0,1,1,0,0)$.

Умножение сводится к проигрыванию одного ритма «в ритме другого ритма». Например, умножая ритм $A = (2,1)$ на ритм $B = (2,1,1)$, получим ритм

$C = A \times B = \{(2,1)\times 2, (2,1)\times 1, (2,1)\times 1\} = (4,2,2,1,2,1)$.

Очевидно, умножение некоммутативно. Зато, оказывается, оно дистрибутивно.

Также рассматривались двухпараметрические ритмы (с низкими и высокими ударами). Для них вводятся аналогичные операции и еще некоторые свои.

М.А. Ройтберг и А.Ю. Грамши

Затем докладчик продемонстрировал написанную им программу, которая выполняет эти операции над ритмами и «озвучивает» результат на динамиках.

В ходе бурного обсуждения докладчику предложили так подать материал на грядущей конференции:

«1) я написал программу, генерирующую ритмы;

2) для этого использовалась такая-то запись ритмов;

3) ритмы можно складывать по таким-то правилам;

4) ритмы можно умножать... и выполнять много разных других операций.

Вот результат, слушайте!»

Отметим, что к обоим докладчикам было одинаковое пожелание — лучше готовиться. Опыт слушания школьников показал, что в работе с ними нужно уделить значительное время подготовке доклада.

Пятое заседание семинара состоялось *17 февраля 2009 г.* ***С.К. Ландо*** сделал доклад на тему **«Выращивание деревьев».**

Эта тема довольно простая, но возникла в сложных вопросах лет 10 назад. Она представляет собой переплетение результатов переднего края науки и задач, доступных школьникам.

Рассмотрим дерево с пронумерованными n вершинами. Пронумеруем произвольным образом ребра. Поменяем местами числа, записанные в вершинах первого ребра. Затем поменяем местами числа, записанные в вершинах второго ребра, и так далее до последнего. Получится некоторая перестановка номеров вершин. (Иначе говоря, каждому ребру соответствует перестановка — транспозиция вершин, которые оно соединяет. Перемножим соответствующие транспозиции. Посмотрим на перестановку, которая получается в результате перемножения.)

1. Упражнение. *Для любого дерева и любой нумерации получится длинный цикл* (т.е. цикл, переставляющий все элементы)[1].

2. Задача. *Возьмем граф с одним циклом. Занумеруем вершины и ребра. Перемножим транспозиции, соответствующие ребрам. Какой циклический тип перестановки получится? (Т.е. на какие циклы она распадается? Какова их длина?)*

Заметим, что любой цикл длины n — это произведение $n - 1$ транспозиции[2].

3. Задача (Гурвиц). *Сколькими способами можно разложить цикл длиной n в произведение транспозиций?* (Числа, получающиеся в ответе, называются числами Гурвица.)

Каждое ребро графа — транспозиция на множестве его вершин.

4. Утверждение. *Произведение транспозиций взаимно однозначно соответствует графу с занумерованными ребрами и вершинами.*

5. Упражнение. *Сколько бывает помеченных деревьев с $n + 1$ вершинами?*

---

[1] Подробнее см.: *Бурман Ю.М.* Графы и перестановки, http://www.mccme.ru/mmks/mar08/Burman.pdf.

[2] П.С. Александров объяснял это так: люди, находящиеся в байдарке, могут пересесть как угодно, меняясь попарно несколько раз.

Ответ: $(n+1)^{n-1}$ (теорема Кэли[3]).

Продолжим задачу. Рассмотрим произвольный граф. Последовательно удалим все вершины степени 1 вместе с ребрами, в них приходящими. Далее удалим все вершины степени 2, соединив концы, приходящих в них ребер. Назовем получившийся граф *клумбой*. Будем выращивать на клумбе деревья (с вершинами в вершинах или на ребрах клумбы).

Задача 6. *Сколько существует различных помеченных деревьев с n вершинами на клумбе G?* (Т.е. n-вершинных графов, представляющих из себя деревья на клумбе G).

Самая простая клумба представляет из себя две вершины, соединенные тремя ребрами. Теорема Кэли дает ответ к задаче 2 в случае «одноточечной клумбы». Оказывается, что ответ мало зависит от клумбы.

Задача возникла в работе Д. Звонкина последних лет, выполненных в связи с теоретической физикой, квантовой теорией поля, алгебраической геометрией.

С.А. Беляев сделал доклад на тему **«Правильные разбиения поверхности сферы с *k* ручками»** (См. текст автора в приложении: http://www.mathedu.ru/polinom/belyaev-sferi_s_k_ruchkami.pdf.)

Комментарии к докладу.

Г.Б. Шабат: 1) предлагаю разделить задачу с уравнениями и задачу реализации в виде многогранника; 2) вынести в отдельную задачу двойственность (нахождение двух правильных графов, а потом создание правильной структуры из них); 3) эта задача относится к числу решенных.

С.К. Ландо: Эту задачу можно решать в терминах перестановок. См. первую главу книги: *Lando S.K., Zvonkin A.K.* Graphs on Surfaces and Their Applications, Springer 2004.

---

[3] Эту формулу нетрудно угадать с помощью последовательного перебора помеченных деревьев с 1, 2, 3, 4 и т.д. вершинами. (См. *Арнольд В.И.* Задачи для детей от 5 до 15 лет, № 49.) Затем можно доказать ее, например, с помощью кодирования деревьев.

Код для помеченных деревьев называется кодом Прюфера и строится следующим образом.

Возьмем какое-нибудь дерево с $n+1$ вершинами, помеченными различными числами от 0 до n. Мы сопоставим дереву последовательность из $n+1$ букв $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Последовательность строится индуктивно.

Возьмем в дереве лист с минимальным номером и возьмем в качестве первой буквы последовательности x с индексом, равным номеру вершины, с которой этот лист соединен.

Затем удалим выбранный лист. Второй буквой будет x с номером, равным номеру вершины, с которой соединен минимальный лист в оставшемся дереве. Этот лист тоже удалим, и так до тех пор, пока не останется дерево из двух вершин (ребро). Получим как раз последовательность длины $n-1$.

Наоборот, по любой последовательности длины $n-1$ можно построить помеченное дерево. Валентность любой вершины в этом дереве на 1 больше частоты, с которой переменная с номером этой вершины встречается в последовательности.

В частности, вершины, номера которых не встречаются в качестве индекса — листья. Взяв первый элемент последовательности, проведем ребро, соединяющее вершину с номером этого элемента и лист с минимальным номером. Затем первый элемент последовательности стираем и повторяем процедуру для новой последовательности (с учетом того, что один лист уже использован, а валентность вершины с номером, равным первому элементу последовательности, уменьшилась на 1; в частности, эта вершина могла стать листом).

Тем самым, есть взаимно-однозначное соответствие между помеченными деревьями на $n+1$ вершине и мономами в разложении $(x_0+x_1+\ldots+x_n)^{n-1}$. В частности, подставляя все x_i равными 1, получаем формулу Кэли.

Шестое заседание семинара состоялось *17 марта 2009 г.* ***М.А. Ройтберг*** сделал доклад на тему **«Проекты в Красноярской летней школе (КЛШ)»**

Докладчик выделил 5 особенностей проектов КЛШ:

1. Длительность проекта 15 дней.

КЛШ длится 21 день. Из них на проекты дается всего 15. Что за это время можно выучить? М.А. попробовал дать школьникам опыт исследования как такового. За все 15 дней на курсе решается всего одна задача! Математически ориентированные ребята любят **долго** решать задачу. Такому стилю долгого решения полезно учить всяких школьников.

2. Самостоятельное блуждание в теме (ученику дается не материал, а поле для исследования). Мы боремся не за новые знания, а за радость открытия. Многие дети не любят математику, потому что им ни разу не довелось в ней что-то открыть. А ведь открытие может совершаться на самых разных уровнях.

3. Чтобы блуждание было успешным, в **задаче должен быть параметр,** а **блуждание должно быть систематичным:**

– начинай с самого простого,

– двигаясь по параметру, можно делать открытия.

Эти «правила блуждания» детям надо объяснить – это задача кураторов. Помощь должна быть косвенной, приходится изобретать непрямые способы подсказывания (например: просьба переписать решение другим способом).

4. Постановка задачи уточняется по ходу решения (как бывает и в жизни).

Здесь докладчик отметил, что он отчасти является учеником Г.Б. Шабата, но хочет выделить и различия между их подходами. Для Г.Б. целевая аудитория – будущие математики, а для М.А. – простые дети. Поэтому длинные определения, которые дает Г.Б., вводя школьника в тему, для М.А. непригодны – они отсекают большой процент детей. Для простого школьника мотивировки глубокой математикой не помогают. Формулировка задачи должна быть недлинная, понятная и интригующая (а уж решение может быть и сложным). Например, тему «Скла́дные квадраты», о которой рассказывал Г.Б. в своем докладе, М.А подает в виде такой задачи.

Обсуждение доклада

«Золотые числа». *Золотые числа – это числа, квадрат которых оканчивается на это же число. Например:* $6^2 = 36$; $5^2 = 25$; $25^2 = 625$. *Найти как можно больше золотых чисел; найти способ нахождения всех таких чисел.*

Действие каждой задачи происходит в своем «мире», цель проекта – познакомить школьника с этим миром. (Подробнее см. *Ройтберг М.А.* «Исследования математических миров», http://www.etudes.ru/ru/forums/topic.php?id=2348). Это позволит экономить время при постановке задачи.

5. В конце работы должен быть отчет (конференция).

Проблемы конференции: 1) дети плохо рассказывают, 2) ребенку интересно быть в центре внимания самому, а не слушать других. На КЛШ эта проблема решается с помощью постерной конференции. Каждый школьник успевает побывать и докладчиком и слушателем, и отработать свой доклад.

М.А. Ройтберг привел другие примеры задач.

«Мудрецы у людоедов». *Мудрецы попали в плен к людоедам. У людоедов есть такой обычай. Пойманных пленников выстраивают в колонну и надевают им на головы колпаки – кому белый, кому черный – наугад. Каждый пленник видит, какого цвета колпаки у всех, кто стоит перед ним, но не знает, какой колпак у него самого и у всех, кто стоит за ним. Каждый пленник, начиная с последнего, должны сказать какого цвета у него колпак. Тех, кто ответил правильно, – отпускают. Остальных – съедают. Мудрецы знают про обычай и могут между собой договориться. Как мудрецам спасти побольше человек? Какое наибольшее число человек можно спасти в самом худшем случае?*

Вначале надо исследовать случай 1, 2, 3 человек, а далее найти общие закономерности. Задача обобщается на несколько цветов колпаков.

«Прямые и плоскости» (задача И.М. Гельфанда). *На сколько частей могут делить плоскость n прямых?*

Формулировка совсем короткая, а детали выясняются потом: что будет, если прямые параллельны? Могут ли пересекаться по 3 и больше в одной точке? И т.д. Эти тонкости надо обсуждать не вначале, а по ходу решения задачи, когда школьники уже вошли во вкус.

Подробности организации проектов и другие примеры задач см. в статье: *Ройтберг М.А.* О математических проектах в Красноярской Летней Школе // Математика. 2008. № 13, http://www.int-sch.ru/docs/projects/Projects-KLSh-1.pdf.

Информация

Летняя школа развития Пифагор 2009

> Правильное обучение должно возникать добровольным соединением, по обоюдному желанию учителя и ученика, ибо если та или иная сторона противится, то задача не будет выполнена надлежащим образом
>
> Ямвлих Халкидский, «О пифагорейской жизни»

Для кого проводится школа? В летней школе развития «Пифагор 2009» могут участвовать школьники 6–11-х классов. Наша школа — для тех, кто хочет усовершенствовать свои познания и научиться чему-нибудь новому, кого радуют новые встречи с интересными людьми.

Место и время проведения. Летняя школа развития «Пифагор 2009» пройдет с 26 июня по 12 июля на базе детского оздоровительного лагеря «Радужный», расположенного в 120 км от Новосибирска на берегу Обского моря, рядом с селом Быстровка Искитимского района Новосибирской области.

Как организована учеба в школе? Школьникам предлагаются курсы по самым разным предметам и наукам: от математики и физики до психологии и философии. Курсы рассчитаны на разный возраст и уровень подготовки. Каждый школьник сам составляет из предложенного набора курсов индивидуальную учебную программу по своим собственным интересам и силам. Один курс рассчитан на 8 часов учебных занятий; школьник может посетить за школу 6 разных курсов, по два курса в каждую из трех учебных четырехдневок.

Что мы делаем в свободное время? Днем в школе работают разнообразные клубы, проводятся спортивные соревнования и математические бои. По вечерам проходят общешкольные конкурсы, интеллектуальные игры, литературные и музыкальные вечера, дискотеки, отрядные огоньки с песнями под гитару у костра.

Стоимость путевки. Льготная стоимость путевки — 17200 руб. Льготная стоимость и дополнительные скидки действительны при условии полной или частичной (30 %) оплаты до 20 мая. Полная стоимость путевки — 18100 руб.

Скидки. Скидки I и II разделов не суммируются; выбирается наибольшая из них.

I. Наличие диплома за текущий или прошлый учебный год по любому предмету, входящему в программу соответствующей олимпиады. Указаны скидки для обладателей диплома I/II/III степени.

Диплом финального этапа всероссийской олимпиады или олимпиады им. Леонарда Эйлера — 2600/2300/2000 руб.

Диплом регионального этапа всероссийской олимпиады или диплом региональных соревнований, проводимых ЦОП «Сигма» (Новосибирск) и ЦОП «Мысль» (Южный Кузбасс) — 1200/1000/800 руб.

II. Участие в одной из предыдущих выездных школ «Пифагор» — 600 р.

III. Семья, отправляющая в школу двоих и более детей, получает скидку 600 рублей на каждого ребенка.

Как стать участником Летней школы? Для участия в Летней школе необходимо в срок до 1 мая заполнить анкету и выслать ее вместе с копией диплома, подтверждающего право на скидку, электронным письмом на адрес pythagor@ngs.ru. (Просьба сканировать диплом с разрешением 72 dpi в формате jpg. Дипломы наших соревнований сканировать не нужно, мы можем проверить ваш результат по хранящемуся в нашем архиве протоколу.)

В этот же срок следует сообщить о желании участвовать в Летней школе по телефону (383)-225-75-66.

Анкета ученика

1. Фамилия, имя, отчество.
2. Класс.
3. Город, школа.
4. Дата рождения.
5. Сведения о родителях: ФИО, домашний и мобильный телефон для связи.
6. Участвовали ли вы в Летних и Зимних школах «Пифагор»?
7. Наличие дипломов олимпиад, дающих право на скидку.
8. Чему вы хотите научиться в Летней школе?

Условия проживания. Для проживания в лагере имеются:

- два зимних корпуса: размещение по 5–8 человек в комнате, душ и туалет в корпусе;
- один летний корпус: размещение по 4 человека в комнате, душ — отдельная кирпичная постройка, туалет на улице.

На территории лагеря имеются футбольное и волейбольное поле, игровые площадки, песчаный пляж и площадки для пляжного футбола и волейбола. Безопасность пребывания детей у воды обеспечивается спасателями. Территория лагеря обработана от клеща.

Документы для заезда в лагерь

1. Медицинская обменная карта-справка о состоянии здоровья ребенка с указанием группы здоровья и рекомендуемого режима, с отметкой об отсутствии педикулеза и контакта с инфекционными больными.
2. Справка от инфекциониста (срок действия справки не более 3 дней).
3. Выписка из сертификата о профилактических прививках.

4. Копия медицинского страхового полиса.
5. Страховой полис от укуса клеща (подлинник).
6. Подписанная памятка.

Правила безопасности и нормы общежития

Организаторы Летней школы считают важным довести до сведения школьников и их родителей три правила, нарушение которых ведет к незамедлительному отчислению ученика из школы. В школе запрещены:

1) самовольный выход школьников за территорию лагеря;
2) самовольное купание в отсутствие взрослых;
3) употребление алкогольных напитков.

Проводящая организация. Летнюю школу развития «Пифагор 2009» проводит ООО «Центр образовательных проектов СИГМА». Контакты в Новосибирске: Аниканова Наталья Викторовна, директор ЦОП СИГМА, (383)-225-75-66, 8-913-909-91-04, centr_sigma@inbox.ru.

Представители оргкомитета:
в Красноярске:
Баженова Ксения Анатольевна, 8-902-929-57-79, kseniyab@yandex.ru,
в Омске:
Мордвинов Дмитрий Александрович, 8-923-675-20-09, mitibus@gmail.com,
на Юге Кузбасса:
Михеева Елена Леонидовна, 8-909-520-86-27, miheeva_elena@inbox.ru.

Общение в Сети. На сайте http://vkontakte.ru открыта группа «Школа Пифагора», в которой идет постоянное общение участников наших проектов. Вы можете участвовать в нем, чтобы лучше понять, как мы живем и чем интересуемся.

Там же к концу мая будут опубликованы описания всех учебных курсов нынешней Летней школы. Состав курсов меняется от школы к школе, но некоторое общее представление о наборе курсов можно получить из списка курсов ЛШ-2008.

Приложение. Список курсов Летней школы «Пифагор 2008»

Актерское мастерство
Апология истории
Геометрические места точек
Введение в нейрокомпьютеры
Введение в термодинамику
Все об алгоритмах
Геометрические неравенства
Графика
Задачи на разрезание
Законы сохранения в механике
Занимательный Рим
Искусственные языки
Комплексные числа
Криптография
Лаборатория творчества
Математическая индукция
Основы проективной геометрии
Поведение животных
Публичное выступление
Свобода, равенство, братство
Создание периодического издания
Старославянский язык
Строение атома
Теория вероятностей
Фотография
Цвет
Человек и Вселенная
Что такое математическая строгость?
Электромагнитные волны
Эмпирический закон Бэнфорда
Энциклопедия — круг знания

Вернуться к содержанию

XXVIII Всероссийский семинар преподавателей математики университетов и педагогических вузов «Проблемы преемственности в обучении математике на уровне общего и профессионального образования» состоится 24–26 сентября 2009 г. на базе Уральского государственного педагогического университета и Уральского государственного профессионально-педагогического университета. Предлагается обсуждение следующих вопросов:

- Стандарты второго поколения. Создание условий для их реализации.
- Преемственность между школой и вузом. ЕГЭ и подготовка к нему.
- Проблемы преемственности в профильном обучении.
- Проблемы преемственности в многоуровневом обучении.

Желающим принять участие в семинаре **до 15 мая 2009 г.** необходимо представить в Оргкомитет:

тезисы выступлений (не более двух страниц) по e-mail: melnikov@k66.ru, perminov@rsvpu.ru, lipatnikovaig@mail.ru (желательно продублировать письмо на все три адреса) и почтовый конверт с подписанным обратным адресом (для отправки приглашения на семинар), копию почтового перевода;

заявку на участие с указанием: фамилии, имени, отчества, ученой степени и ученого звания, места работы или учебы, должности, e-mail, почтового адреса, по которому будут направлены изданные материалы семинара;

заявку и тезисы в печатном виде выслать по адресу: 620017, Екатеринбург, ул. К. Либкнехта 9, деканат математического факультета;

организационный взнос в размере 200 руб. за каждую страницу, который необходимо выслать по адресу: 620092, Екатеринбург, ул. Сыромолотова, д. 24, кв. 207, Аввакумовой Ирине Александровне.

Не забудьте экземпляр тезисов прислать руководителю семинара по электронной почте или обычным письмом (не заказным и не бандеролью): 117628, Москва, ул. Грина, д. 36, кв. 107, Мордковичу Александру Григорьевичу; e-mail: mordkovich@ihome.ru; дом. тел. (495)714-93-71; моб. 8-906-049-87-67.

Тезисы доклада должны быть набраны в редакторе Microsoft Word, шрифт Times New Roman, 14 размер. Все поля по 2 см, межстрочный интервал – 1,5.

Порядок оформления тезисов:

- фамилия и инициалы печатаются по правому краю страницы строчными буквами, строкой ниже – город в скобках;
- название работы – по центру страницы заглавными буквами;
- библиографический список – в конце работы (шрифт 12 размера).

Рабочая группа оргкомитета: Мельников Юрий Борисович, Липатникова Ирина Геннадьевна, Перминов Евгений Александрович и др.

Контактные телефоны:

8-902-265-7416 – Мельников Юрий Борисович,

8-912-238-5483 – Липатникова Ирина Геннадьевна,

8-919-391-4410 – Перминов Евгений Александрович,

(343) 271-45-97 – кафедра теории и методики обучения математике (зав. кафедрой Липатникова Ирина Геннадьевна).

2–3 октября 2009 г. Пермским государственным педагогическим университетом проводится конференция «Актуальные проблемы преподавания геометрии», посвященная юбилею кафедры геометрии ПГПУ.

Научный руководитель конференции профессор **Алла Ефимовна Малых**.

Члены оргкомитета:

доктор исторических наук, профессор А.М. Белавин (Пермь, ПГПУ), доктор физ.-мат. наук, профессор Г.П. Матвиевская (Оренбург, ОГПУ), доцент З.И. Андреева (Пермь, ПГУ), кандидат пед. наук, доцент Г.Г. Шеремет (Пермь, ПГПУ).

Ответственный секретарь: кандидат физ.-мат. наук, доцент М.С. Ананьева (Пермь, ПГПУ).

Основные направления работы конференции:

1) вузовское обучение геометрии;

2) преподавание геометрии в профильных классах;

3) оригами и геометрия;

4) использование информационных технологий при обучении геометрии.

Предполагается работа круглого стола с обсуждением вопросов:

– проблемы геометрической подготовки будущего учителя математики;

– подготовка первокурсников к восприятию вузовского курса геометрии;

– адаптационные мероприятия, направленные на повышение уровня геометрической подготовки студентов;

– востребованность выпускников математического факультета;

– проблемы, связанные с решением геометрических задач ЕГЭ.

На время конференции организуются выставки:

– учебников по геометрии XVIII–XX вв.;

– литературы по истории математики;

– современных учебных и учебно-методических пособий по геометрии для вузов и школ; электронных изданий геометрической тематики.

По материалам конференции планируется издание сборника трудов. Заявки на участие и публикации просьба направлять до **1 июня 2009 г.** в электронном варианте (E-mail: matfakPSPU@yandex.ru).

Требования к оформлению тезисов и статей

Все тексты (объем до 10 страниц) должны быть набраны в редакторе Word, шрифт Times New Roman, 14 кегль, межстрочный интервал – одинарный. Поля: левое – 3 см, правое, верхнее и нижнее по 2,5 см.

Заголовок статьи должен включать название публикации, Ф.И.О. автора, название города и образовательного учреждения. Объем статей – до 10 страниц. Стоимость 1 страницы текста 100 рублей (без рассылки). Оплата публикаций и пересылки сборника производится почтовым переводом по адресу: 614030, г. Пермь, ул. Толбухина, д. 3, кв. 57, Ананьевой Миляуше Сабитовне.

Контактные телефоны и адреса

Телефон деканата математического факультета ПГПУ: 8(342) 212-75-73

8342233055 (Малых Алла Ефимовна), malych@pspu.ac.ru,

89504636268 (Ананьева Миляуша Сабитовна), ananjeva@pspu.ac.ru.